



ČESKÉ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V PRAZE  
Fakulta jaderná a fyzikálně inženýrská



# **Aplikace dekonvoluce v astronomických pozorováních**

## **Application of deconvolution in astronomical imaging**

Bakalářská práce

Autor: **David Rendl**  
Vedoucí práce: **doc. Ing. Filip Šroubek, Ph.D. DSc.**  
Akademický rok: 2022/2023

## ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

Student:	David Rendl
Studijní program:	Aplikace přírodních věd
Studijní obor:	Matematické inženýrství
Studijní zaměření:	Aplikované matematicko-stochastické metody
Název práce (česky):	Aplikace dekonvoluce v astronomických pozorováních
Název práce (anglicky):	Application of deconvolution in astronomical imaging

### Pokyny pro vypracování:

- 1) Seznamte se s dekonvolučními metodami vhodnými pro astronomická pozorování.
- 2) Seznamte se s metodami na odhad impulzní odezvy systému (Point Spread Function) a metodami slepé dekonvoluce.
- 3) Navrhněte metodu pro detekci artefaktů vznikajících při dekonvoluci.
- 4) Porovnejte zkoumané metody dekonvoluce a detekce artefaktů na syntetických a reálných astronomických pozorováních.

Doporučená literatura:

- 1) J. L. Starck, et al., Deconvolution in Astronomy: A Review. PASP 114, 2002, 1051.
- 2) P. Campisi, K. Egiazarian, (Eds.), Blind Image Deconvolution: Theory and Applications (1st ed.), CRC Press, 2007.
- 3) I. Goodfellow, et al., Deep Learning. MIT Press, 2016.

Jméno a pracoviště vedoucího bakalářské práce:

doc. Ing. Filip Šroubek, Ph.D. DSc.

Ústav teorie informace a automatizace, Pod Vodárenskou věží 4, 182 00 Praha 8, CZ

Jméno a pracoviště konzultanta:

Datum zadání bakalářské práce: 31.10.2022

Datum odevzdání bakalářské práce: 2.8.2023

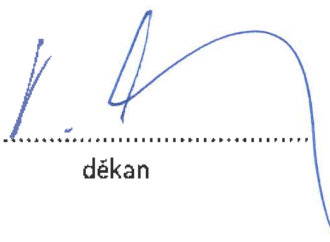
Doba platnosti zadání je dva roky od data zadání.

V Praze dne 31.10.2022

  
.....  
garant oboru

  
.....  
vedoucí katedry



  
.....  
děkan

*Poděkování:*

Chtěl bych zde poděkovat především svému školiteli doc. Ing. Filipu Šroubkovi, Ph.D. DSc. za pečlivost, ochotu, vstřícnost a odborné i lidské zázemí při vedení mé bakalářské práce. Dále bych rád poděkoval Ing. Tomáši Krepeckému za poskytnutí konzultací, Zuzaně Stehlíkové za jazykovou korekturu práce, Bc. Janu Krátkému, Bc. Jiřímu Nábělkovi a Bc. Ondřeji Fojtíkovi za užitečnou a konstruktivní zpětnou vazbu.

*Čestné prohlášení:*

Prohlašuji, že jsem tuto práci vypracoval samostatně a uvedl jsem všechnu použitou literaturu.

V Praze dne 2. srpna 2023

David Rendl

*Název práce:*

**Aplikace dekonvoluce v astronomických pozorováních**

*Autor:* David Rendl

*Obor:* Aplikované matematicko-stochastické metody)

*Druh práce:* Bakalářská práce

*Vedoucí práce:* doc. Ing. Filip Šroubek, Ph.D. DSc., Ústav teorie informace a automatizace

*Abstrakt:* Tato bakalářská práce se zaměřuje na aplikaci dekonvoluce v astronomických pozorováních s důrazem na klasické metody. Implementujeme a optimalizujeme jednotlivé dekonvoluční algoritmy, které následně testujeme na uměle rozmazaných snímcích i na reálných datech. Dále se věnujeme problematice měření ostrosti a vzniku artefaktů při dekonvoluci. Implementujeme vlastní metriku pro určení přítomnosti artefaktů ve snímku a pro jejich kvantifikaci. Výsledky naší práce demonstrují, jak algoritmy dekonvoluce mohou výrazně zlepšit kvalitu astronomických snímků, i když kvalita rekonstrukce je silně závislá na nastavení parametrů a odhadu impulzní odezvy. Také jsme poukázali na význam měření ostrosti a detekce artefaktů pro úspěch dekonvolučního procesu.

*Klíčová slova:* Astronomie, Dekonvoluce, Ostrost, PSF, Ringing, Richardson-Lucy

*Title:*

**Application of deconvolution in astronomical imaging**

*Author:* David Rendl

*Abstract:* This bachelor project is focused on application of deconvolution in astronomical imaging, with an emphasis on classical methods. We implement and optimize various deconvolution algorithms, which are subsequently tested on artificially blurred images as well as on real data. We also delve into the issues of sharpness measurement and artifact creation during deconvolution. We implement our own metric for determining the presence of artifacts in the image and for their quantification. The results of our work demonstrate how deconvolution algorithms can significantly improve the quality of astronomical images, although the quality of reconstruction is highly dependent on parameter settings and impulse response estimation. We also highlight the importance of sharpness measurement and artifact detection for the success of the deconvolution process.

*Key words:* Astronomy, Deconvolution, Sharpness, PSF, Ringing, Richardson-Lucy

# Obsah

<b>Úvod</b>	<b>7</b>
<b>1 Formulace problému</b>	<b>8</b>
<b>2 Metody dekonvoluce</b>	<b>13</b>
2.1 Richardson-Lucy algoritmus . . . . .	13
2.2 Metoda nejmenších čtverců . . . . .	14
2.3 Jansson-Van Cittert algoritmus . . . . .	17
2.4 Maximum a posteriori pravděpodobnosti . . . . .	18
2.5 Variační Bayesovský přístup . . . . .	21
<b>3 Míra ostrosti</b>	<b>24</b>
3.1 Ringing a artefakty . . . . .	24
3.2 Metody měření ostrosti . . . . .	28
3.3 Detekce ringingu . . . . .	32
<b>4 Experimenty se synteticky rozmazanými snímky</b>	<b>39</b>
4.1 Odhad PSF . . . . .	40
4.2 Dekonvoluce uměle rozmazaných snímků . . . . .	42
<b>5 Experimentální část</b>	<b>67</b>
5.1 Měřicí vybavení . . . . .	67
5.2 Předzpracování snímků . . . . .	68
5.3 Dekonvoluce pořízených snímků . . . . .	70
<b>Závěr</b>	<b>91</b>

# Úvod

Dekonvoluce je jednou ze zásadních oblastí zpracování obrazu. Obecně se jedná o odstranění defektů signálu vzniklých měřicím zařízením či okolními podmínkami při měření. Dekonvoluční algoritmy nacházejí široké uplatnění všude, kde dochází k zaznamenávání obrazu, typicky v medicíně, kde je potřeba rekonstruovat snímky z přístrojů, jako je magnetická rezonance či CT, v mikroskopii nebo také v astronomii. Poslední zmiňovaný případ bude hlavní náplní této práce. Během astronomických měření vždy nevyhnutelně dochází k degradaci obrazu, jednak samotným detektorem, jelikož je nutné pořizovat snímky s dlouhou expozicí, což vede k silnému zašumění signálu, jednak nepředvídatelnými atmosférickými jevy. Další degradace vznikají kvůli defektům a nepřesnostem samotné optické soustavy. Těmto jevům se dá za jistých okolností předcházet, například pomocí adaptivní optiky, ovšem jedná se o velmi komplikovaná a nákladná zařízení, která zůstávají doménou především velkých pracovišť. Malá či dokonce mobilní pracoviště se musejí spoléhat na rekonstrukci obrazu nebo provádět měření, při kterých příliš nezáleží na ostrosti pořizovaných snímků (např. fotometrie). Velký posun v oblasti dekonvoluce nastal krátce po roce 1990, kdy byl na oběžnou dráhu vynesena Hubbleův vesmírný dalekohled (HST). Kvůli nepřesně vybroušenému zrcadlu bylo možné pořizovat pouze rozmazané snímky, a tak se výzkumníci museli uchýlit k použití metod rekonstrukce obrazu. Zrcadlo dalekohledu se odchylovalo od ideálního tvaru o  $2,3 \mu\text{m}$ , což mělo za následek silnou sférickou aberaci. Tento problém byl odstraněn na konci roku 1993, ovšem poznatky získané z tohoto období dodnes nacházejí uplatnění v pozemských observatořích.

Hlavním cílem této bakalářské práce je shrnutí, implementace a optimalizace metod klasické a slepé dekonvoluce a využití těchto metod v astronomických pozorováních. Dále se budeme zabývat vznikem a detekcí artefaktů vznikajících při dekonvoluci. Pokusíme se navrhnout metodu pro detekci artefaktů pro určení optimálního nastavení parametrů dekonvoluce. Tuto navrženou metodu implementujeme a otestujeme na syntetických a reálných datech.

Práce je rozdělena do 5 kapitol, první kapitola je zaměřena na teorii týkající se problému dekonvoluce. Nejprve je čtenář seznámen se základní problematikou modelování degradace obrazu. Následně ve druhé kapitole je pozornost věnována základním dekonvolučním algoritmům v případě, kdy je známa impulzní odezva systému (Point Spread Function). Také se budeme věnovat otázce slepé dekonvoluce, kdy je cílem odhadnout samotnou impulzní odezvu pomocí variačních Bayesovských metod. Třetí kapitola se zaměřuje na problematiku artefaktů, měření ostrosti snímků a nakonec na návrh metody pro měření ostrosti, která bude brát samotné artefakty v potaz. Čtvrtá kapitola je věnována numerickým experimentům na uměle rozmazaných snímcích, kde prověříme použitelnost diskutovaných algoritmů na astronomických snímcích. Nakonec v kapitole páté otestujeme všechny metody na reálných snímcích pořízených autorem této práce. Testovací data byla pořízena Newtonovým dalekohledem s průměrem objektivu 130 mm v kombinaci s DSLR Canon Eos 1100D. Optická soustava byla před měřením zkalibrována laserovým kolimátorem.

# Kapitola 1

## Formulace problému

Předpokládejme získaný snímek charakterizovaný distribucí energie na detektoru, označme ho  $I$ . Dále k němu příslušný skutečný snímek  $O$ , který se snažíme zrekonstruovat. Navíc označme  $P$  impulzní odezvu systému, neboli PSF (z angl. Point Spread Function). Náš naměřený snímek lze popsat jako

$$I(x, y) = \int_{x_1=-\infty}^{\infty} \int_{y_1=-\infty}^{\infty} P(x - x_1, y - y_1) O(x_1, y_1) dx_1 dy_1. \quad (1.1)$$

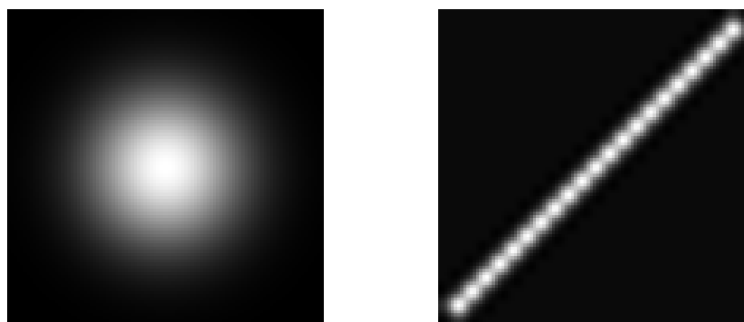
Do modelu dále musíme zahrnout aditivní šum. Většina šumu v astronomických pozorováních je termálního charakteru, čili má normální rozdělení. Předpokládejme tedy aditivní šum  $N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ . Výsledný model lze tím pádem zapsat jako

$$I(x, y) = (P * O)(x, y) + N(x, y), \quad (1.2)$$

kde  $P$  představuje matici konvolučního jádra. Pozastavme se krátce u impulzní odezvy systému  $P(x, y)$ , tedy PSF.  $P$  popisuje odezvu optického systému na bodový zdroj modelovaný Diracovou  $\delta$ -funkcí. V praxi nám tedy PSF ukazuje, jakým způsobem došlo k rozmazání snímku. Jediný požadavek na PSF je normovanost, aby byla zachována intenzita.

**Definice:** Matici  $P^{m \times n}$ , kde  $m, n \in \mathbb{N}$  nazveme impulzní odezvou nějakého optického systému, pokud splňuje

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n P(x, y) = 1. \quad (1.3)$$



Obrázek 1.1: Příklad Gaussovské PSF (vlevo) a PSF odpovídající lineárnímu pohybovému rozmazání pod úhlem  $45^\circ$  (vpravo)



Tento model lze ekvivalentně zapsat pomocí maticového násobení, což se hodí pro implementace, ale také pro odvození některých algoritmů. Abychom mohli vyjádřit konvoluci jako maticové násobení, je třeba představit jeden speciální druh matice.

**Definice:** Matici  $P \in \mathbb{R}^{m \times n}$  nazveme diagonálně konstantní, neboli Toeplitzovskou, pokud  $\forall x \in \widehat{m-1}$   $\forall y \in \widehat{n-1}$  platí  $P(x, y) = P(x+1, y+1)$ .

Nejprve se podíváme na speciální případ, kdy je jádro konvoluce tvořené jedním vektorem délky  $k$ . Jedná se tedy o lineární pohybové rozmazání o délce  $k$  pixelů. Předpokládáme snímek  $O$  s rozměry  $m \times n$ . PSF má tvar

$$P = (p_1, p_2, \dots, p_k). \quad (1.4)$$

Z  $P$  vytvoříme Toeplitzovskou matici  $H \in \mathbb{R}^{n \times m}$  následujícím způsobem:

$$H = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_k & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & p_1 & p_2 & \cdots & p_k \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

a konvoluci můžeme zapsat jako maticové násobení  $I = HO + N$ . Toto je speciální případ, PSF má tvar vektoru pouze v případě, kdy jde o horizontální nebo vertikální rozmazání. Ve všech ostatních případech je situace o poznání složitější. Stále máme snímek  $O \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , ovšem PSF je nyní  $P \in \mathbb{R}^{p \times q}$  a naším cílem je vytvořit z  $P$  dvojitě blokovou Toeplitzovskou matici. Demonstrujme tento postup na jednoduchém příkladu.

$$O = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Výsledkem konvoluce je matice  $I \in \mathbb{R}^{(m+p-1) \times (n+q-1)}$ . Prvním krokem je zero-padding jádra  $O$ , abychom získali matici o rozměru  $(m+p-1) \times (n+q-1)$ .

$$P' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 20 & 0 & 0 \\ 30 & 40 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Nyní z každého řádku  $P$  vytvoříme Toeplitzovskou matici stejně jako v případě 1.5.

$$P'_0 = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 0 \\ 40 & 30 & 0 \\ 0 & 40 & 30 \\ 0 & 0 & 40 \end{pmatrix} P'_1 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & 0 \\ 0 & 20 & 10 \\ 0 & 0 & 20 \end{pmatrix} P'_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Nyní již z jednotlivých Toeplitzovských matic vytvoříme dvojitě blokovou Toeplitzovskou matici

$$H = \begin{pmatrix} P'_0 & 0 \\ P'_1 & P'_0 \\ P'_2 & P'_1 \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Poté musíme převést vstupní matici  $O$  na sloupcový vektor, pak lze provést maticové násobení.

$$O' = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

$$I' = HO' \quad (1.11)$$

Nakonec je potřeba výsledný vektor  $I' \in \mathbb{R}^{12 \times 1}$  převést na matici  $I \in \mathbb{R}^{(m+p-1) \times (n+q-1)}$ .

Podívejme se nyní na příklad, jak PSF působí na snímek. Předpokládejme, že náš snímek byl rozmazán lineárním horizontálním pohybem fotoaparátu. Toto rozmazání lze vyložit jako jednodimenzionální průměrování sousedních pixelů. Model rozmazání je pak dán jako

$$P(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{L+1} & -\frac{L}{2} \leq x_1 \leq \frac{L}{2} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad (1.12)$$

kde  $L \in \mathbb{N}$ ,  $L$  liché. Požadavek na liché  $L$  je zde pouze z praktických důvodů, umožňuje nám jednoznačně vybrat "prostřední" pixel. Pro náš příklad předpokládejme, že náš snímek je horizontálně rozmazaný o 5 pixelů. PSF má poté tvar  $P = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ . Spočtěme nyní konvoluci této PSF se standardním snímkem Leny.



Obrázek 1.2: Vlevo výchozí obrázek bez rozmazání. Vpravo obrázek rozmazaný o 5 pixelů horizontálně získaný konvolucí výchozího snímku s PSF  $P = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$

S pohybovým rozmazáním se v astronomickém snímkování setkáváme běžně, častěji opět u menších observatoří. Při pořizování dlouhých expozic je nezbytně nutné využít zařízení kompenzující pohyb Země kolem své osy. Tato zařízení se nazývají paralaktické montáže, a kvůli drobným nepřesnostem v jejich výrobě a při jejich seřizování dochází během snímkování k drobným odchyškám, jež mají za následek rozmazání snímku. Ačkoliv by bylo možné i na toto rozmazání použít metody dekonvoluce, zbytečně bychom přidávali do snímků další artefakty. Místo toho se v praxi využívá metoda dělení expozic na menší části. Namísto jedné dlouhé expozice se pořídí mnoho kratších expozic, ve kterých se mechanické nepřesnosti nemají možnost projevit. Tyto snímky se poté pomocí vhodné lineární transformace zaregistrují a zprůměrují. Tento postup přináší další výhodu, a sice výraznou redukci šumu.

V této práci se budeme zabývat myopickou dekonvolucí, tedy rekonstrukcí obrazu, kdy je PSF částečně známa, a také slepou dekonvolucí, kdy je naším cílem zrekonstruovat obraz i PSF bez jakékoliv apriorní znalosti systému. Při pohledu na samotnou formulaci problému dekonvoluce za předpokladu, že známe PSF, se okamžitě nabízí jedno snadné řešení, a sice řešení v prostoru Fourierových transformací. Z konvolučního teorému víme, že

$$\hat{I}(u, v) = \hat{O}(u, v)\hat{P}(u, v) + \hat{N}(u, v) \quad (1.13)$$

$$\hat{O}(u, v) = \frac{\hat{I}(u, v)}{\hat{P}(u, v)}. \quad (1.14)$$

Tato metoda, známá také jako metoda Fourierových koeficientů [1], má zásadní výhodu ve výpočetní rychlosti díky algoritmu pro výpočet Fourierovy transformace (FFT) vyvinutém v 60. letech minulého století. Otestujme tuto metodu na dalším snímku, tentokrát využijme jiný standardní snímek, kameramana. PSF zůstane stejná jako u obrázku 1.2, tedy horizontální rozmazání o 5 pixelů.



Obrázek 1.3: Vlevo výchozí obrázek kameramana, uprostřed po konvoluci s PSF  $P = (\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{5})$ , vpravo po dekonvoluci metodou Fourierových koeficientů

Jak je z obrázku 1.3. patrné, tato metoda je naprosto nevhodná pro dekonvoluci snímků zatížených jakýmkoliv šumem. Tato metoda má uplatnění ve zpracování signálu, ovšem v našem případě je její použití vyloučeno, astronomické snímky jsou velmi silně zatížené šumem.



Obrázek 1.4: Snímek kulové hvězdokupy M13 demonstruje silné zatížení šumem

Příklad v obrázku 1.3 a ukázková data z obrázku 1.4 jasně ukazují, že pro účinnou dekonvoluci astronomických dat musíme využít důmyslnější a složitější postupy, které berou v potaz šum.

## Kapitola 2

# Metody dekonvoluce

### 2.1 Richardson-Lucy algoritmus

V roce 1972 Wiliam Richardson [2] a o 2 roky později nezávisle na něm Leon B. Lucy [3] představili iterativní algoritmus pro rekonstrukci snímku rozmazaného známou PSF. Tohoto algoritmu můžeme využít za předpokladu, že považujeme hvězdy za bodové zdroje, a tedy můžeme jejich tvar v našem degradovaném snímku považovat přímo za impulzní odezvu systému. Celý algoritmus je založen na Bayesově větě, tedy

$$p(O|I) = \frac{p(I|O)p(O)}{p(I)}, \quad (2.1)$$

kde  $p(O)$  představuje apriorní znalost o systému,  $p(O|I)$  je posteriorní pravděpodobnost a  $p(I|O)$  je věrohodnostní funkce. Ta je z [4] [5] dána Poissonovským rozdělením

$$p(I|O) = \prod_{x,y} \frac{[P * O(x, y)]^{I(x,y)} \cdot e^{-(P * O)(x,y)}}{I(x, y)!}. \quad (2.2)$$

Po zlogaritmování

$$\ln p(I|O) = \sum_{x,y} I(x, y) \ln((P * O)(x, y)) - (P * O)(x, y) - \ln(I(x, y)!). \quad (2.3)$$

Poslední člen,  $\ln(I(x, y)!)$  je konstanta, a tedy můžeme maximalizovat pouze

$$\alpha(I|O) = \sum_{x,y} I(x, y) \ln((P * O)(x, y)) - (P * O)(x, y) \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha(I|O)}{\partial O} &= \frac{I(x, y)}{(P * O)(x, y)} \frac{\partial (P * O)(x, y)}{\partial O} - \frac{\partial (P * O)(x, y)}{\partial O} \\ &= \frac{I(x, y)}{(P * O)(x, y)} * P(x, y) - P(x, y) \\ &= \left[ \frac{I}{P * O} * P^T \right](x, y) - 1 \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Zde jsme využili derivace konvoluce a také vztah 1.4. Pro získání Richardson-Lucyho iterace vezmeme v potaz konvergenci algoritmu [8]. Předpokládáme, že pro vysoký počet iterací se zrekonstruovaný obraz již nebude nadále měnit, tím pádem

$$\frac{O_{n+1}(x, y)}{O_n(x, y)} = 1. \quad (2.6)$$

Celkem tedy dostáváme iterativní metodu v podobě [5] [6] [7]

$$O_{n+1} = O_n \cdot \left[ \frac{I}{P * O_n} * P^T \right]. \quad (2.7)$$

Pro  $n = 0$  při inicializaci algoritmu předpokládáme  $O_n = I$ . Tento přístup sám o sobě funguje velice dobře na běžných snímcích, ovšem pro astronomické snímky je nutné zahrnout do iterativního procesu regularizaci, metodu, jež nadále redukuje šum, a zároveň vyhlazuje snímky při zachování důležitých detailů. Regularizační metody jsou diskutovány v kapitole 2.4.



Obrázek 2.1: Vlevo snímek Leny rozmazán pohybovým rozmazáním o 20 pixelů pod úhlem  $18^\circ$ . Vpravo rekonstrukce pomocí Richardson-Lucy algoritmu

## 2.2 Metoda nejmenších čtverců

Dalším běžně používaným přístupem je metoda nejmenších čtverců, zde máme na výběr širokou škálu algoritmů. Vezměme nyní model 1.11. Intuitivní, avšak naivní myšlenka by byla nalézt inverzní filtr  $H^{-1}$ ,

$$I = HO \longrightarrow O = H^{-1}I, \quad (2.8)$$

ovšem zde narazíme hned na několik problémů. Tím největším je fakt, že  $H$  nemusí být čtvercová, a tedy inverze ani neexistuje. To je bohužel téměř vždy případ, se kterým se potýkáme. Dalším problémem je všudypřítomný šum, jenž zapříčiní, že náš model nebude platit. Třetím problémem je nepřesnost  $H$ . Je důležité si uvědomit, že v kontextu astronomického snímkování bereme jako PSF přímo obraz hvězdy (více v experimentální části), ovšem jedná se stále jen o odhad. Získat perfektní PSF je prakticky nemožné. Máme hned několik způsobů jak se s těmito problémy vyrovnat. První je Moore-Penroseho pseudoinverze.

**Definice:** Mějme matici  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Pak matici  $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$  nazveme pseudoinverzní maticí k  $A$  právě tehdy, když splňuje Moore-Penroseho podmínky:

1.  $AA^+A = A$
2.  $A^+$  je slabá inverze  
 $A^+AA^+ = A^+$
3.  $AA^+$  je Hermitovská  
 $(AA^+)^* = AA^+$
4.  $A^+A$  je Hermitovská  
 $(A^+A)^* = A^+A$

Nyní můžeme zrekonstruovat původní obraz jako

$$O = H^+I. \quad (2.9)$$

Výhoda tohoto postupu je, že z podstaty pseudoinverze získáme řešení s minimální normou. Bohužel tento postup nepřináší příliš dobré výsledky. (probrat článek a implementace). Další možností, jak získat rozumná řešení, je zpětná projekce:

$$I = HO \longrightarrow H^T I = H^T HO \longrightarrow O = \frac{H^T I}{H^T H} = (H^T H)^{-1} H^T I. \quad (2.10)$$

Opět se jedná o řešení minimalizující normu, jenže má několik zásadních nevýhod. Toto řešení předpokládá Gaussovskou věrohodnostní funkci, ovšem jak již bylo zmíněno v části 2.1, obraz vzniká Poissonovským procesem. Další nevýhodou je nepraktičnost tohoto postupu. Ačkoliv můžeme takto zrekonstruovat obraz v jednom kroku, vyžaduje to, abychom ukládali do paměti všechny příslušné snímky. Astronomické snímky bývají velké, testovací snímky z Hubbleova dalekohledu mají rozměry i  $12000 \times 12000$  pixelů, experimentální snímky pořízené pro účely této práce mají rozměry  $4000 \times 4000$  pixelů, a je tedy značně nepraktické počítat rekonstrukci tímto způsobem. Navíc je stále potřeba myslet na fakt, že se potýkáme se snímky silně zatíženými šumem, takže se jedná o problém následujícího tvaru:

$$I - HO = \xi, \quad (2.11)$$

kde  $\xi$  představuje reziduum a naším cílem je ve skutečnosti minimalizovat  $L_2$  normu tohoto rezidua, tedy řešíme

$$\hat{O} = \arg \min_O \|I - HO\|^2. \quad (2.12)$$

Vraťme se k tvrzení, že 2.10 předpokládá Gaussovské rozdělení. Podívejme se na věrohodnostní funkci s Gaussovským rozdělením:

$$P(O|I) = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{(I - HO)_i^2}{2\sigma_i^2}\right) \quad (2.13)$$

$$\ln P(O|I) = -\sum_i \frac{(I - HO)_i^2}{2\sigma_i^2} + konst. \quad (2.14)$$

Předpokládáme zde  $\sigma_i^2 = 1$ , jinak by se jednalo o váženou metodu nejmenších čtverců (WLSM). Maximalizujeme 2.14:

$$\frac{\partial}{\partial O_i} \frac{1}{2} \sum_i (I - HO)_i^2 = \sum_i (I - HO)_i (-H^T)_i \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.15)$$

$$\hat{O} = \frac{H^T I}{H^T H} = (H^T H)^{-1} H^T I. \quad (2.16)$$

Metodou maximální věrohodnosti s Gaussovským rozdělením jsme získali stejný výraz jako ve 2.10. Povšiměme si také podobnosti s Richardson-Lucyho algoritmem. Tento příklad demonstruje, proč potřebujeme iterativní postup pro řešení metodou nejmenších čtverců. I kdybychom se vypořádali s praktickými problémy, které diskutované přístupy přináší, omezili bychom se jen na Gaussovské rozdělení, jenže z kapitoly 2.1 víme, že potřebujeme využít Poissonovo rozdělení. Hledáme tedy iterativní postup, jenž bude řešit

$$\hat{O} = \arg \min_O \frac{1}{2} \|I - HO\|^2. \quad (2.17)$$

Využijme metody největšího sestupu. Spočteme gradient  $\hat{O}$  a vyčíslíme v aktuálním odhadu  $O^k$ . Následně odečteme gradient  $\hat{O}$  od  $O^k$ , čímž získáme nový odhad  $O^{k+1}$ , jenž bude blíže hledanému minimu:

$$\hat{O} = \arg \min_O \frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \left( I_i - \sum_{b=1}^N H_{ib} O_b \right)^2 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \hat{O}}{\partial O_j} = \sum_{i=1}^M \left( I_i - \sum_{b=1}^N H_{ib} O_b \right) (-H_{ij}). \quad (2.19)$$

Do výrazu 2.19 nyní za  $O_b$  dosadíme konkrétní  $O_b^k$ , čímž získáme gradientní obraz:

$$\nabla \hat{O} = \sum_{i=1}^M H_{ij} \sum_{b=1}^N H_{ib} O_b^k. \quad (2.20)$$

Iterativní postup pro rekonstrukci metodou nejmenších čtverců má tedy tvar:

$$O_j^{k+1} = O_j^k - \lambda^k \sum_{i=1}^M H_{ij} \sum_{b=1}^N H_{ib} O_b^k, \quad (2.21)$$

kde  $\lambda$  představuje velikost kroku. 2.20 a 2.21 se dají prakticky vyjádřit ve vektorové formě jako

$$\nabla \hat{O} = H^T (HO^k - I) \quad (2.22)$$

$$O^{k+1} = O^k - \lambda^k H^T (HO^k - I). \quad (2.23)$$

Tomuto postupu se také říká Landweberova iterace [9] nebo také Jacobiho metoda [1].





Obrázek 2.2: Ukázka dekonvoluce Landweberovou iterací,  $\lambda = 0, 1$ , počet iterací 20

Obrázek 2.2 demonstruje, že ačkoliv samotné doostření je výrazné, Landweberova metoda výrazně zesiluje šum a už po 20 iteracích je kvalita snímku značně degradovaná.

**Poznámka:** Ve velmi nepravděpodobném případě, kdy je  $H$  unitární nebo ortogonální, tedy kdy  $H^* = H^{-1}$  nebo  $H^T = H^{-1}$ , se nám tento postup značně zjednoduší:

$$O^{k+1} = O^k - H^T(HO^k - I) = H^T I. \quad (2.24)$$

Takový případ je ovšem velmi vzácný, a je tedy uváděn spíše jako zajímavost.

### 2.3 Jansson-Van Cittert algoritmus

V roce 1931 představil Pieter Van Cittert [10] jednoduchý rekonstrukční algoritmus:

$$O^{n+1} = O^n + \alpha(I - P * O^n) \quad (2.25)$$

přičemž začínáme s  $n = 0$  a  $O^{(0)} = I$ .  $\alpha$  je konvergenční parametr a je obecně roven 1. Převedením problému do prostoru Fourierových transformací získáme

$$\hat{O}^{n+1} = \hat{O}^n + \alpha(\hat{I} - \hat{P}\hat{O}^n). \quad (2.26)$$

Tento přístup má výhodu v rychlé konvergenci, často konverguje po pouhých 5 či 6 iteracích, ovšem je zde vidět podobnost s metodou Fourierových koeficientů (1.13) a bohužel tento přístup má stejný problém. Za přítomnosti šumu tato metoda nekonverguje, a je tudíž nepoužitelná v astronomickém snímkování. O necelých 40 let později přišel P. Jansson [11] s modifikací původního Van Cittertova algoritmu, kdy omezil množinu řešení, aby zvýšil robustnost celé metody. Předpokládáme  $\forall x \in \hat{m} \forall y \in \hat{n}$  platí  $A \leq O(x, y) \leq B$ , kde  $m, n$  jsou rozměry našeho snímku a  $A, B$  jsou konstanty, například 0 a 255, nebo  $\tilde{B}$  a 255, kdy  $\tilde{B}$  představuje odhadnutý jas pozadí z naměřeného snímku. Jansson-Van Cittertova iterace pak nabývá tvaru

$$O^{n+1}(x, y) = O^n(x, y) + r(x, y)[I - P * O^n](x, y), \quad (2.27)$$

kde

$$r(x, y) = C[1 - 2(B - A)^{-1}|O^n(x, y) - 2^{-1}(A + B)|]. \quad (2.28)$$

C je konstanta. Obecně se dá Jansson-Van Cittertův algoritmus zapsat jako

$$O^{n+1} = \mathcal{P}_C[O^n + \alpha(I - P * O^n)] \quad (2.29)$$

přičemž  $\mathcal{P}_C(\cdot)$  je operátor projekce na konvexní množinu, například zmíněný interval  $(\tilde{B}, 255)$ . Můžeme tedy snadno omezit množinu řešení tak, abychom získávali pouze smysluplné hodnoty, popřípadě hodnoty odpovídající měřením. Operátor  $\mathcal{P}_C(\cdot)$  lze využít i k obdobné modifikaci ostatních dekonvolučních algoritmů. V případě Richardson-Lucyho algoritmu

$$O_{n+1} = \mathcal{P}_C\left[O_n \cdot \left(\frac{I}{P * O_n} * P^T\right)\right], \quad (2.30)$$

a stejně tak v případě metody nejmenších čtverců

$$O^{k+1} = \mathcal{P}_C[O^k - \lambda^k H^T (HO^k - I)]. \quad (2.31)$$

Omezením množiny řešení využíváme apriorní znalosti o optickém systému a o přípustné množině řešení, což nás vede k další dekonvoluční metodě.

## 2.4 Maximum aposteriorní pravděpodobnosti

Metodu MAP (Maximum Aposteriori Probability) lze prakticky považovat za regularizovanou verzi metody maximální věrohodnosti. Hlavním účelem je využít znalostí o systému, abychom mohli předem určit, jaká řešení dekonvoluce připouštíme, a tím omezit vliv šumu na výsledné rekonstrukce. Posteriorní pravděpodobnost lze charakterizovat jako

$$P(O|I, H) \propto P(I|O, H)Pr(O) \quad (2.32)$$

přičemž  $P(O|O, H)$  je věrohodnostní funkce a  $Pr(O)$  představuje náš prior, naši předchozí znalost o výsledku. Nyní tedy vzniká otázka jak zvolit  $Pr(O)$ . Jedna z populárních a často užívaných možností je Gibbsův prior:

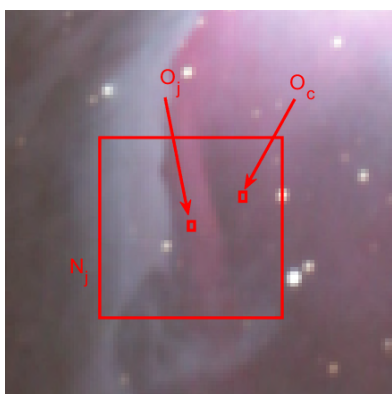
$$Pr(O) \propto \exp[-\beta U(O)] \quad (2.33)$$

kde  $\beta$  je regularizační parametr určující sílu regularizace a  $U(\cdot)$  se nazývá potenciální energie. Funkci  $U$  chceme volit tak, aby snímky odpovídající našim požadavkům měly nízkou energii, tedy vysokou pravděpodobnost, a naopak aby snímky zdeformované a zašuměné měly vysokou energii, a tudíž nízkou pravděpodobnost. Volme následující funkci  $U(O)$ :

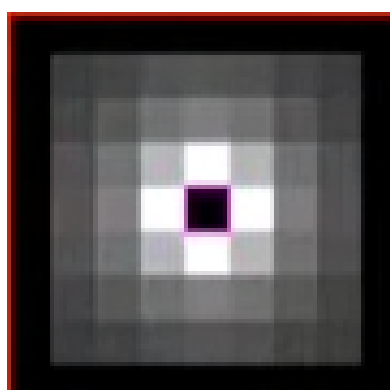
$$U(O) = \sum_{j=1}^J \sum_{c \in N_j} \xi_{c,j} w_{c,j} \psi(O_c - O_j). \quad (2.34)$$

Rozeberme si postupně celý výraz. Vezměme malý výřez jednoho z pořízených snímků pro lepší představu. Výřez pochází ze snímku mlhoviny M42.

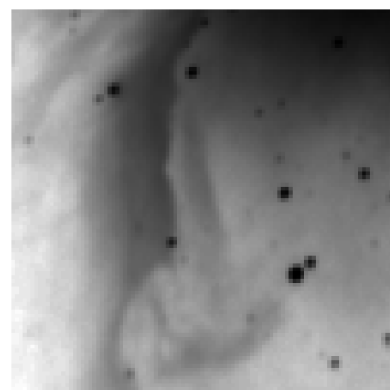
$N_j$  představuje oblast vycentrovanou kolem  $j$ -tého pixelu  $O_j$ .  $O_c \in N_j$  jsou ostatní pixely v oblasti  $N_j$ , viz. obrázek 2.2.  $\xi_{cj}$  představuje váhy určené vzdáleností od pixelu  $O_j$ . Čím dále jsme od pixelu  $O_j$ , tím nižší váha. Myšlenka je taková, že daleko od  $j$ -tého pixelu už se může jednat o úplně jinou strukturu, a tedy chceme omezit působení regularizace. Příklad matice vah vzdáleností je na obrázku 2.3.  $w_{cj}$  jsou váhy úměrné vzdálenosti.  $w_{cj}$  je podobnostní mapa. Problém s regularizací je takový, že může vyhlazovat struktury, které nás zajímají, a my bychom rádi toto vyhlazování omezili. Proto pokud je pixel  $O_c$  podobný pixelu  $O_j$ , přiřadíme mu váhu blízkou 0, jelikož se dá očekávat, že podobné pixely budou součástí stejné struktury. Pokud se pixely liší, přiřadíme mu váhu blízkou 1. Výsledkem je podobnostní mapa, příklad v obrázku 2.4. Funkce  $\psi$  může být absolutní hodnota (TV regularizace), druhá mocnina (Tikhonovova regularizace) a spousta dalších.



Obrázek 2.3



Obrázek 2.4



Obrázek 2.5

Jak už víme z kapitoly 2.1, pořizování astronomických snímků se řídí Poissonovským procesem. Modifikujme tedy Richardson-Lucyho algoritmus tak, abychom brali v potaz apriorní znalost o systému:

$$p(I|O)Pr(O) = \prod_{x,y} \frac{[P * O(x,y)]^{I(x,y)} \cdot e^{-(P * O)(x,y)}}{I(x,y)!} \exp(-\beta U(O)) \quad (2.35)$$

$$L = \sum_{x,y} I(x,y) \ln((P * O)(x,y)) - (P * O)(x,y) - \ln(I(x,y)!) - \beta U(O). \quad (2.36)$$

$L$  chceme maximalizovat. V předchozích částech jsme využili Picardovy iterace, kdy podíl aktuální a předchozí iterace je roven 1 pro  $n \rightarrow \infty$ , čímž jsme prakticky vynutili konvergenci algoritmu. Tento postup zde ovšem využít nemůžeme, bude potřeba použít metodu největšího spádu (gradient descent):

$$O^{n+1} = O^n - \alpha \frac{\partial L}{\partial O} \quad (2.37)$$

$$O^{n+1} = O^n + \alpha \left[ \frac{I}{P * O} * P^T - 1 - \beta \frac{\partial U}{\partial O} \right]. \quad (2.38)$$

Toto je obecný předpis pro metodu maxima aposteriorní pravděpodobnosti při Poissonovském šumu. Problém zde je, že najít derivaci  $U$  bývá poměrně složitý úkol. Pokusíme se nyní problém derivace  $U$  přiblížit na jednoduchém příkladu.

Okolí  $N_j$   $j$ -tého pixelu omezíme pouze na pixely přímo sousedící s pixelem  $j$ .

	·	
·	j	·
	·	

Rozeberme samotnou derivaci pro případ  $\psi(x) = x^2$ . Lze snadno nahlédnout že platí

$$\frac{1}{2} \left\| \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \end{bmatrix} O \right\|^2 = O^T [D_x^T D_y^T] \begin{bmatrix} D_x \\ D_y \end{bmatrix} O = O^T \underbrace{[D_x^T D_x + D_y^T D_y]}_L O, \quad (2.39)$$

kde  $L$  je operátor derivace a má tvar

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

a tedy derivaci můžeme reprezentovat jako konvoluci s operátorem derivace  $L$

$$\frac{\partial}{\partial O} = L * O. \quad (2.41)$$

Otázkou tedy zůstává jak toto aplikovat v kontextu našeho hledání derivace funkce energie  $U$ . Ještě náš demonstrativní příklad zjednodušíme a omezíme se pouze na jednu dimenzi, tedy mějme pixel  $O_j$  a oblast  $N_j$ , pouze jeho dva sousedy.

$O_{j-1}$	$O_j$	$O_{j+1}$
-----------	-------	-----------

Suma přes pixely v oblasti  $N_j$  v rovnici 2.34 se zjednoduší pouze na výraz  $\psi(O_j - O_{j-1}) + \psi(O_{j+1} - O_j)$ , takže v případě Tikhonovovy regularizace, tedy  $\psi(x) = x^2$  máme

$$\frac{\partial}{\partial O_j} (O_j - O_{j-1})^2 + (O_{j+1} - O_j)^2 = 4O_j - 2O_{j-1} - 2O_{j+1}, \quad (2.42)$$

a tedy výsledný filtr má tvar

$$L = (-1, 2, -1). \quad (2.43)$$

Povšimněte si, že tento výsledek je konzistentní s filtrem 2.40. Nyní se podívejme na příklad TV regularizace, tedy  $\psi(x) = |x| = \sqrt{x^2}$ . Pro jednoduchost označme  $(O_j - O_{j-1}) = \nabla O_j$

$$\frac{\partial}{\partial O_j} \psi(\nabla O_j) + \psi(\nabla O_{j+1}) = \frac{\nabla O_j}{|\nabla O_j|} - \frac{\nabla O_{j+1}}{|\nabla O_{j+1}|} = O_j \left[ \frac{1}{|\nabla O_j|} + \frac{1}{|\nabla O_{j+1}|} \right] - O_{j-1} \frac{1}{|\nabla O_j|} - O_{j+1} \frac{1}{|\nabla O_{j+1}|}. \quad (2.44)$$

Zde je potřeba zdůraznit, co vlastně TV regularizace dělá. Všimněme si, že okolním pixelům k pixelu  $O_j$  přiřazuje váhy úměrné rozdílu  $\nabla O_j$ . To je ovšem totéž, co dělají váhy  $w_{c,j}$  v definici energie 2.34, tedy TV regularizace zachovává hrany a při jejím použití můžeme kompletně vynechat podobnostní mapu v definici energie.

**Poznámka:** Fakt, že vhodná volba funkce  $\psi(x)$  umožňuje vynechat podobnostní mapu, nabízí otázku jestli nelze vynechat i váhy určené vzdáleností k pixelu  $O_j$ . Faktem je, že otázka vah v regularizačním členu byla už důkladně prozkoumána a žádné výraznější zlepšení optimalizace vah nepřináší.

Nyní se podíváme na konkrétní algoritmy využívající MAP přístup, omezíme se pouze na Poissonovský šum, ačkoliv je možné MAP použít i s jinými distribucemi. Začneme s prvním příkladem, Tikhonovovou regularizací [12] [13] (v literatuře se často uvádí pojmenování Tikhonov-Miller). Chceme najít maximum

$$p(I|O)Pr(O) = \prod_{x,y} \frac{[P * O(x,y)]^{I(x,y)} \cdot e^{-(P * O)(x,y)}}{I(x,y)!} \exp\left(-\beta \sum_{x,y} |\nabla O(x,y)|^2\right), \quad (2.45)$$

což je ekvivalentní s minimalizací

$$L = \sum_{x,y} (P * O)(x,y) - I(x,y) \ln(P * O)(x,y) + \beta \sum_{x,y} |\nabla O(x,y)|^2 + konst., \quad (2.46)$$

čímž při použití stejného postupu jako v kapitole 2.1 získáme iterativní postup [5]

$$O_{n+1} = O_n \left[ \frac{I}{P * O_n} * P^T \right] \frac{1}{1 - 2\lambda_{TM} \Delta O_n}. \quad (2.47)$$

Regularizační parametr  $\beta$  se běžně značí jako  $\lambda_{TM}$ . V případě TV regularizace [14] minimalizujeme

$$L = \sum_{x,y} (P * O)(x,y) - I(x,y) \ln(P * O)(x,y) + \beta \sum_{x,y} |\nabla O(x,y)| + konst. \quad (2.48)$$

a výsledná aktualizací rovnice má tvar [5, 14]

$$O_{n+1} = O_n \left[ \frac{I}{P * O_n} * P^T \right] \frac{1}{1 - \lambda_{TV} \operatorname{div}\left(\frac{\nabla O_n}{|\nabla O_n|}\right)}. \quad (2.49)$$

Kompletní odvození pomocí variačního počtu je k dispozici v [5]. I na rovnice 2.47 a 2.49 můžeme aplikovat techniku projekcí na konvexní množiny diskutovanou v části 2.3. TV regularizace je ve většině případů vhodnější i přes vyšší výpočetní složitost, jelikož využití  $\mathcal{L}^1$  normy oproti  $\mathcal{L}^2$  normě zajistí zachování hran [14], ovšem přináší jiný problém. Absolutní hodnota nemá v nule derivaci. Toto se dá ošetřit například relaxovanou formou TV regularizace, kdy volíme  $\psi(x) = \sqrt{(x + \epsilon)^2}$ . Postupy jak ošetřit derivaci v nule jsou stále objektem zkoumání a v této práci se jimi dále zabývat nebudeme.

## 2.5 Variační Bayesovský přístup

V této části si představíme zajímavou metodu slepé dekonvoluce. Velmi často se při rekonstrukci snímků setkáváme se situacemi, kdy impulzní odezvu neznáme a ani nemáme způsob jak ji účinně odhadnout. V kontextu astronomického snímkování to mohou být situace, kdy zkoumaný objekt zabírá příliš velkou část zorného pole, nebo situace kdy jsou hvězdy příliš blízko u sebe na to, aby byl odhad z tvaru hvězdy možný (typicky například u kulových hvězdokup). Variační Bayesovský přístup [15, 16] nám poslouží jako nástroj pro odhad PSF, kterou pak použijeme pro dekonvoluci jiným algoritmem. Byť je možné touto metodou provádět i samotnou rekonstrukci snímku, my se omezíme pouze na odhady impulzní odezvy. Jak se později ukáže, pro astronomické snímkování je Richardson-Lucyho algoritmus nejvhodnější a také je výpočetně méně náročný, v kapitole 5 budeme provádět dekonvoluci na reálných datech, kdy rozměry snímků jsou až  $4000 \times 4000$  pixelů. Proto je pro nás výhodnější využít RL algoritmus.

Vycházíme opět z Bayesovy věty

$$P(O, H|I) = \frac{P(I|O, H)P(O)P(H)}{P(I)}. \quad (2.50)$$

My bychom chtěli faktorizovat posteriorní pravděpodobnost

$$P(O, H|I) \approx q_1(O)q_2(H). \quad (2.51)$$

K tomu nyní musíme ještě zadefinovat jeden zásadní pojem.

**Definice:** Kullback-Leiblerova divergence [17]. Jsou-li  $P$  a  $Q$  pravděpodobnostní míry nad množinou  $X$  a je-li  $P$  absolutně spojitá vzhledem ke  $Q$ , pak definujeme Kullback-Leiblerovu divergenci jako

$$D_{KL}(P|Q) = \int_X \ln \frac{dP}{dQ} dP, \quad (2.52)$$

kde  $\frac{dP}{dQ}$  je Radon-Nikodymova derivace. V případě spojitých distribucí lze definici KL divergence psát jako

$$D_{KL}(P|Q) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \ln \frac{p(x)}{q(x)} dx, \quad (2.53)$$

kde  $p(x)$  a  $q(x)$  jsou hustoty pravděpodobnosti.

Tato definice je pro nás velmi užitečná, prozrazuje nám, jak moc jsou si 2 pravděpodobnostní míry podobné. Můžeme tedy vzít posteriorní pravděpodobnost 2.50 a faktorizovat ji:

$$D_{KL}(q_1 q_2 || P(O, H|I)) = - \int \int q_1 q_2 \ln \frac{P(O, H|I)}{q_1 q_2} dO dH, \quad (2.54)$$

kde malými písmeny značíme příslušné hustoty pravděpodobnosti. Tuto Kullback-Leiblerovu vzdálenost pak můžeme minimalizovat vzhledem k  $q_1$ :

$$\frac{\partial}{\partial q_1} \int \int q_1 q_2 \ln \frac{q_1 q_2}{P(O, H|I)} dH dO \quad (2.55)$$

což není nic jiného než Euler-Lagrangeova rovnice. Jejím vyřešením získáme [18]

$$q_1(O) \propto \exp\{E_H[\ln P(O, H|I)]\}. \quad (2.56)$$

Stejně postupujeme v případě hustoty  $h$ . Výsledkem je

$$q_2(H) \propto \exp\{E_O[\ln P(O, H|I)]\}. \quad (2.57)$$

Jak tedy postupujeme v případě variační Bayesovské metody? Nejprve faktorizujeme posteriorní pravděpodobnost:

$$P(O, H|I) \approx q_1(O)q_2(H). \quad (2.58)$$

K tomu nám právě poslouží minimalizace KL divergence. Poté posteriorní pravděpodobnost marginalizujeme. To je po faktorizaci triviální krok.

$$P(H|I) = \int P(O, H|I)dO \approx \int q_1(O)q_2(H)dO. \quad (2.59)$$

Marginalizovanou posteriorní pravděpodobnost maximalizujeme:

$$\hat{h} = \underset{h}{\operatorname{argmax}} P(H|I). \quad (2.60)$$

A nakonec maximalizujeme posteriorní pravděpodobnost:

$$\hat{o} = \underset{o}{\operatorname{argmax}} P(O, \hat{h}|I). \quad (2.61)$$

Jak jsme si ukázali v 2.55 a 2.56, faktor  $q_1$  závisí na momentech  $q_2$  a naopak, je tedy nutné řešit tento problém iterativně [18]. Tento postup je generalizací metody maximální věrohodnosti [19], kterou jsme použili u Richardson-Lucyho algoritmu a u metody nejmenších čtverců. Jedná se o velmi účinný nástroj, a to především v případě, kdy nemůžeme dobře definovat posteriorní pravděpodobnost. Variační Bayesovský přístup toto omezení obchází právě faktorizací posteriorní pravděpodobnosti a minimalizací KL divergence. Efektivitu tohoto přístupu budeme demonstrovat v kapitolách 4 a 5, kdy nám poslouží pro odhad impulzní odezvy.

## Kapitola 3

# Míra ostrosti

V kapitolách 4 a 5 se budeme zabývat dekonvolucí na simulovaných a na reálných datech. Než k tomu však přistoupíme, je potřeba objasnit, jakým způsobem budeme posuzovat kvalitu získaných výsledků a také na jaké další problémy narazíme.

Motivace pro přípravu metrik kvality je poměrně zřejmá. Při testech metod na simulovaných datech můžeme bez problémů využít například PSNR (Peak Signal to Noise Ratio), ovšem v případě reálných snímků v kapitole 5 nemáme referenční snímek (ground truth), na jehož základě by bylo možné kvalitu posoudit. V takovém případě se nabízí zkoumat ostrost snímku před a po dekonvoluci, jenže kvantifikovat parametr, jako je ostrost, je složitý úkol sám o sobě, z velké části se jedná o subjektivní záležitost.

Dále se budeme zabývat problémem spojeným s dekonvolucí, a sice vznikem artefaktů. I přes to, že např. u Richardson-Lucyho algoritmu je dokázána konvergence, výsledky nejsou vždy dobré. Zlepšení kvality snímku je totiž závislé na tom, jak dobře dokážeme určit PSF. Pokud se náš odhad PSF liší od skutečnosti, výsledná dekonvoluce bude zatížena artefakty.

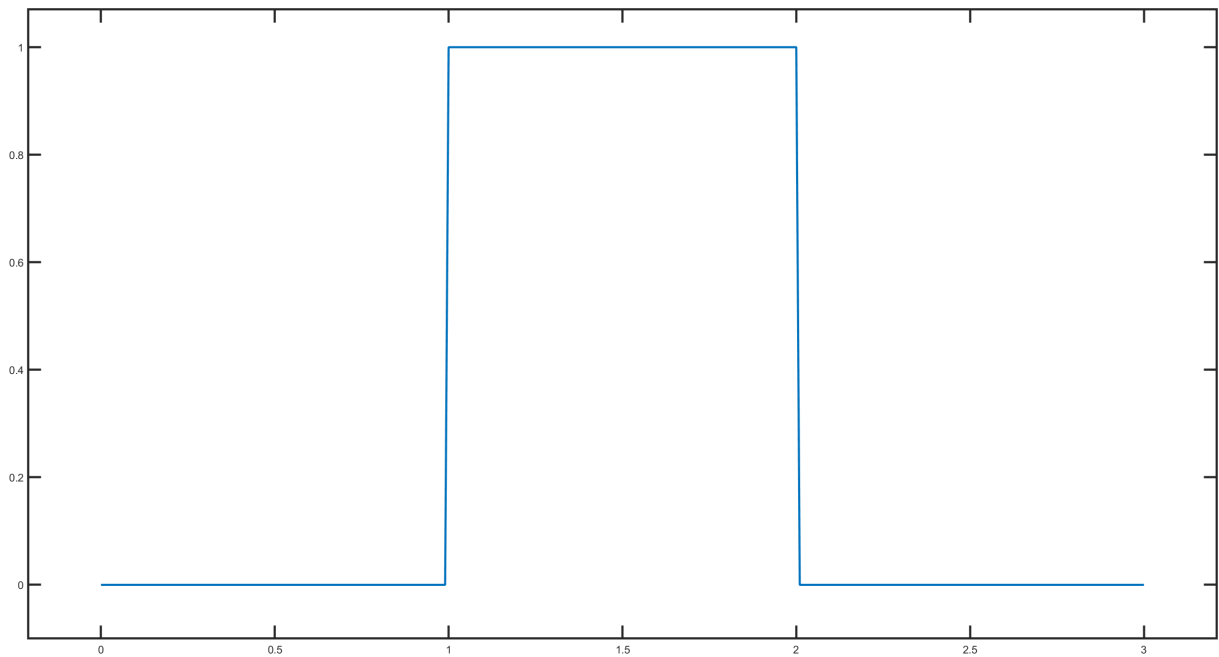
### 3.1 Ringing a artefakty

Obecná definice říká, že ringing vzniká, když neoscilující vstup má za následek oscilující výstup. Toto můžeme demonstrovat na jednoduchém jednodimenzionálním příkladě. Uvažujme následující funkci:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & a < x < b \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

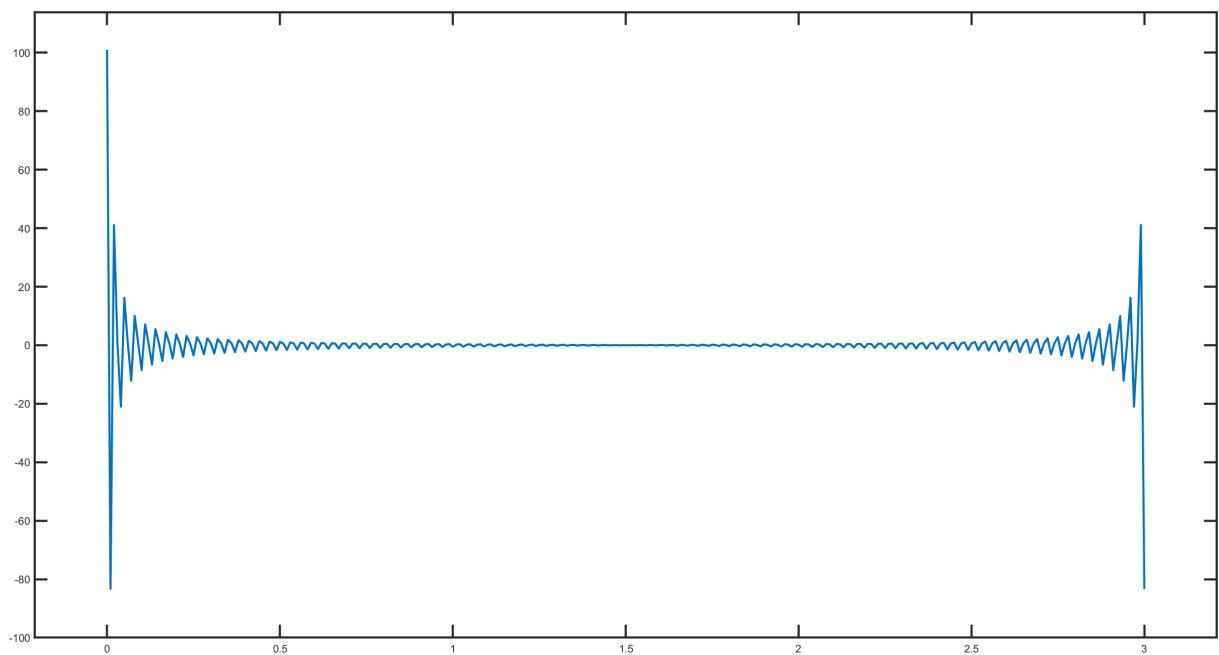
Jedná se o známou step funkci.





Obrázek 3.1: Graf funkce 3.1 pro  $a=1$  a  $b=2$

Nyní se podívejme, co se stane, když na funkci 3.1 aplikujeme Fourierovu transformaci.

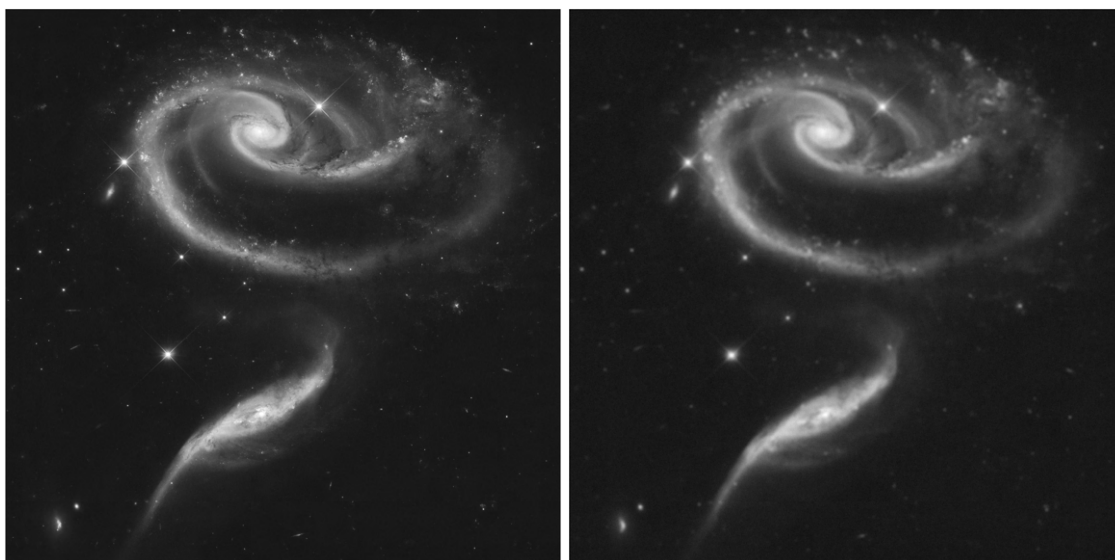


Obrázek 3.2: Graf funkce 3.1 po aplikaci Fourierovy transformace

Vidíme, že neoscilující vstup má oscilující výstup. S tímto jevem se potýkáme prakticky ve všech oblastech využívajících rekonstrukci obrazu.

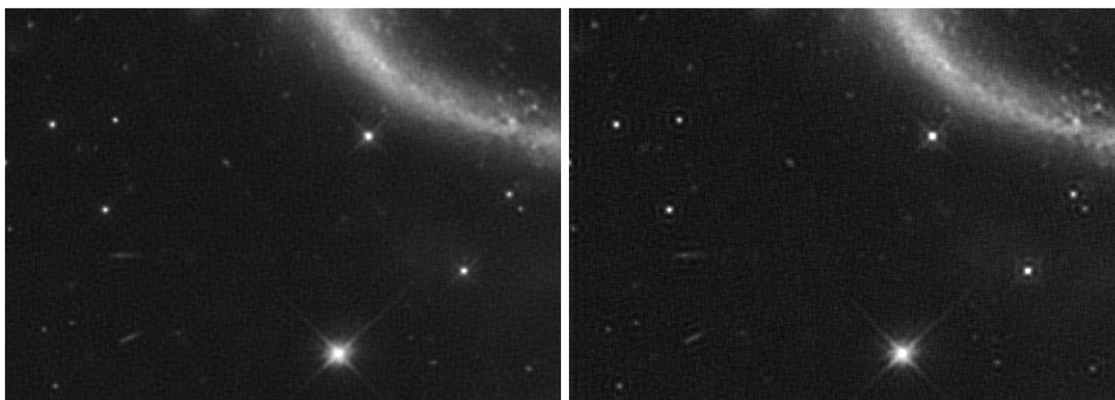
**Poznámka:** Tento příklad je tak známý, že má i svůj název, jedná se o tzv. Gibbsův fenomén. Poprvé byl popsán už v roce 1848 v článku Henryho Wilbrahama [20], který se domníval, že ringing vzniká nepřesnostmi v měření. Poněkud paradoxně Gibbs není tím, kdo tuto vlastnost Fourierovy transformace objevil či vysvětlil. Detailní vysvětlení tohoto jevu přinesl až Maxime Bocher [21] v roce 1906.

Ukažme si problém s vznikem artefaktů na modelovém příkladě. Vezmeme snímek z Hubbleova dalekohledu a uměle ho rozmazáme. Tyto snímky se vyznačují výbornou ostrostití a minimálním šumem, jsou tedy pro podobné testy naprosto ideální.



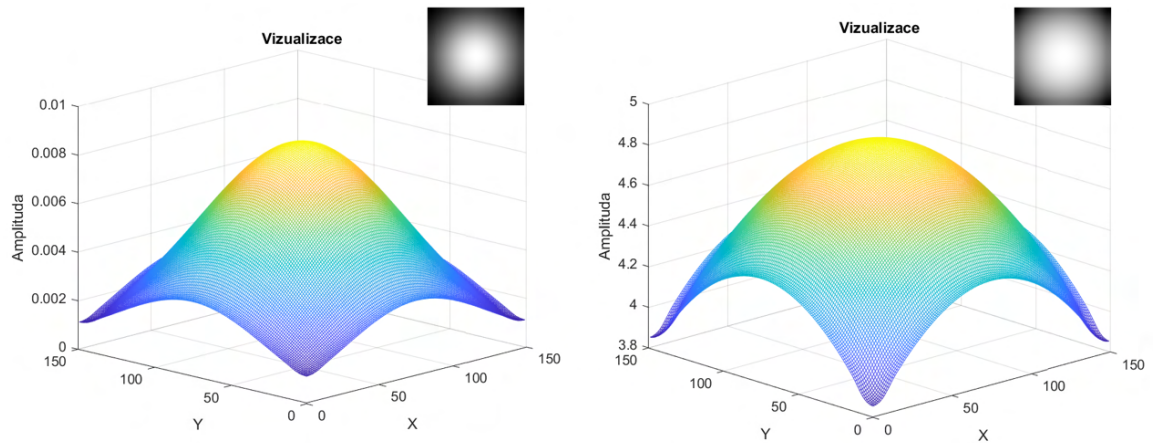
Obrázek 3.3: Vlevo ostrý snímek z Hubbleova dalekohledu, vpravo snímek rozmazaný Gaussovskou PSF o velikosti 15 pixelů a s rozptylem 5

Nyní se podívejme na rekonstrukci rozmazaného snímku za použití 100 iterací obyčejného neregulovaného Richardson-Lucyho algoritmu. Rekonstrukci provedeme dvakrát, nejprve se správnou PSF, kterou jsme použili k rozmazání snímku, a poté s mírně upravenou PSF. Lišit se bude jen větší střední hodnotou. Výsledky si ukážeme na výřezu z rekonstrukce, pro lepší viditelnost ringingu. Stejně artefakty se však objevují napříč celým snímekem.



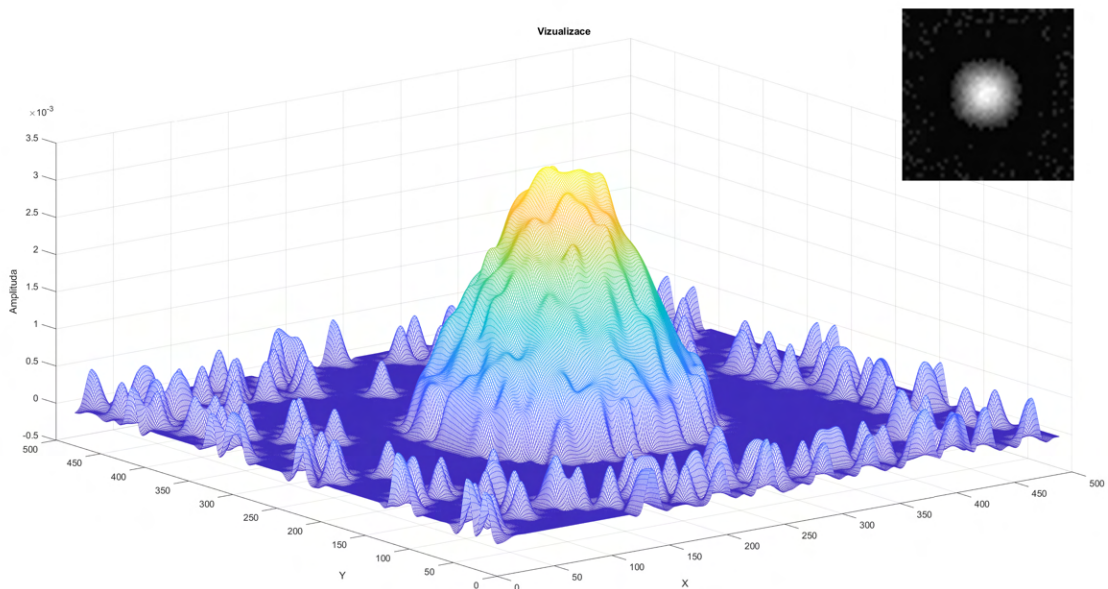
Obrázek 3.4: Vlevo výřez z rekonstrukce se správnou PSF, vpravo výřez z rekonstrukce s chybnou PSF

Když se podíváme na samotné PSF použité pro rekonstrukci, může se na první pohled zdát, že jsou velmi odlišné. Je ovšem potřeba pamatovat na fakt, že obě jádra rozmazání jsou synteticky vygenerovaná.



Obrázek 3.5: Vlevo originální PSF použité k rozmazání snímku, vpravo PSF použité pro demonstraci vzniku ringingu

V praxi nebudeme mít takto perfektní Gaussovské impulzní odezvy. PSF budeme odhadovat z tvaru hvězd ve snímcích a snímky samotné budou zatíženy šumem, jasnem pozadí atp. Když zkusíme odhadnout PSF ze rozmazaného snímku v obrázku 3.3 na základě tvaru hvězd, dostaneme následující výsledek:



Obrázek 3.6: Odhad PSF z rozmazaného snímku z obrázku 3.3

V obrázku 3.6 je pouze hrubý odhad impulzní odezvy. Detailněji se budeme zabývat odhadu PSF v části 4.1. Poněkud překvapující může být, že i takto hrubý odhad je pro rekonstrukci daleko lepší než zdeformovaná PSF z obrázku 3.5. Artefakty se za použití tohoto hrubého odhadu začínou výrazně projevovat až u vysokého počtu iterací (500 a více). Je to dáno faktem, že ačkoliv je PSF z obrázku 3.6 plná vad, stále reprezentuje rozmazání lépe než PSF s rozptylem výrazně odlišným od skutečnosti.

## 3.2 Metody měření ostrosti

S rozvojem a rozšířením fotoaparátů v posledních dekádách došlo také k vývoji mnoha algoritmů pro měření ostrosti. Jejich primární účel spočívá v automatickém zaostřování. Všechny algoritmy pro měření ostrosti mají jedno společné - dokáží rozeznat ostřejší snímek ze dvou, pouze pokud oba snímky zachycují stejnou scénu. Jak již bylo zmíněno v úvodu kapitoly, ostrost je subjektivní, a tedy neexistuje způsob jak rozhodnout, který ze dvou úplně odlišných snímků je ostřejší. To pro nás nepředstavuje žádný zásadnější problém, chceme měřit ostrost po každé iteraci dekonvoluce, jen nebude možné porovnat ostrosti snímků mezi sebou.

Míry ostrosti lze prakticky seskupit na základě principu na kterém fungují [22].

1. Gradientní metody (GRA), založené na první derivaci snímku. Předpokládá, že ostré snímky budou obsahovat více ostrých hran než snímky rozmazané.
2. Laplacovské metody (LAP), podobné bodu 1, ovšem využívají druhých derivací.
3. Waveletové metody (WAV), využívají vlastnosti waveletových transformací, konkrétně jde o schopnost popsat frekvenční a prostorový obsah snímku pomocí waveletových koeficientů..
4. Statistické metody (STA), využívají statistických vlastností snímků.
5. DCT metody (DCT), neboli Discrete Cosine Transform metody, velmi podobné metodám založeným na waveletové transformaci.

Různých metod existuje spousta, metody ze stejných kategorií poskytují podobné výsledky, a tak z každé kategorie vybereme jednu metodu. Z gradientních metod použijeme tenegrad algoritmus [23, 24, 25], populární metriku často používanou pro automatické ostření. Je definována jako:

$$\phi_{x,y} = \sum_{i,j \in I} G_x(i, j)^2 + G_y(i, j)^2, \quad (3.2)$$

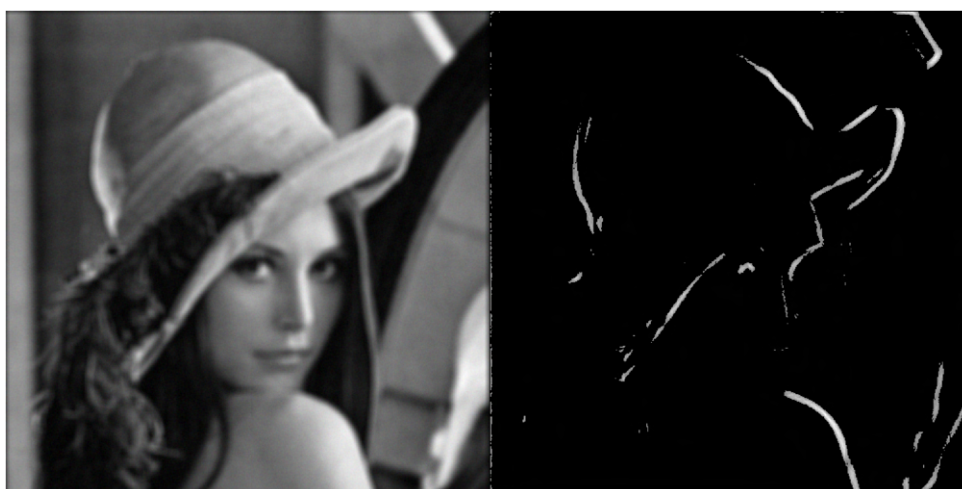
kde  $G_x = I * \mathcal{G}_x$  resp.  $G_y = I * \mathcal{G}_y$  jsou X-gradient resp. Y-gradient daného snímku vypočtené konvolucí snímku  $I$  se Sobelovým filtrem tvaru

$$\mathcal{G}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathcal{G}_y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Ukažme si na příkladu, jak tato metrika funguje. Vezměme obrázek Leny, rozmazme ho Gaussovskou PSF o velikosti 10 pixelů se střední hodnotou 5. Poté na ostrý i rozmazaný obrázek aplikujme Sobelův filtr.



Obrázek 3.7: Vlevo ostrý snímek Leny, vpravo snímek Leny po konvoluci se Sobelovým filtrem



Obrázek 3.8: Vlevo snímek Leny rozmazaný Gaussovskou PSF, vpravo rozmazaný snímek po konvoluci se Sobelovým filtrem

Obrázky 3.1 a 3.2 názorně demonstrují, co myslíme tvrzením, že gradientní metody fungují na předpokladu výskytu většího počtu hran v ostrém obrázku ve srovnání s obrázkem rozmazaným. Tenegrad metrika tedy jen sčítá hodnotu pixelů po aplikaci Sobelova filtru. V našem modelovém příkladě vychází  $\phi_{x,y} \approx 10^4$  pro ostrý snímek a  $\phi_{x,y} \approx 10^3$  pro rozmazaný snímek. Alternativní verze téhož je metoda "tenegrad variance"[26] definovaná jako

$$\phi_{x,y} = \sum_{i,j} (G(i,j) - \bar{G})^2, \quad (3.4)$$

kde  $\bar{G}$  je průměr  $G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2}$ . S touto definicí získáme v našem modelovém příkladě hodnoty  $\phi_{x,y} \approx 10^9$  pro ostrý snímek a  $\phi_{x,y} \approx 10^7$ .

Ve druhé kategorii si ukážeme metodu měření ostrosti představenou S. Nayarem v roce 1994 [27]. Jedná se o metodu založenou na alternativní definici Laplaceova operátoru. Ostrost pak definujeme jako

$$\phi_{x,y} = \sum_{i,j} \Delta_m I(i, j), \quad (3.5)$$

přičemž  $\Delta_m I = |I * \mathcal{L}_x| + |I * \mathcal{L}_y|$ ,  $\mathcal{L}_x = [-1, 2, -1]$  a  $\mathcal{L}_y = \mathcal{L}_x^T$ . Povšimněme si, že filtr  $\mathcal{L}_x$  je totožný s filtrem 2.43, kde jsme diskutovali reprezentaci derivace jako konvoluce s vhodným filtrem. Stejně jako u metody tenegrad lze využít alternativní definice ostrosti [26]:

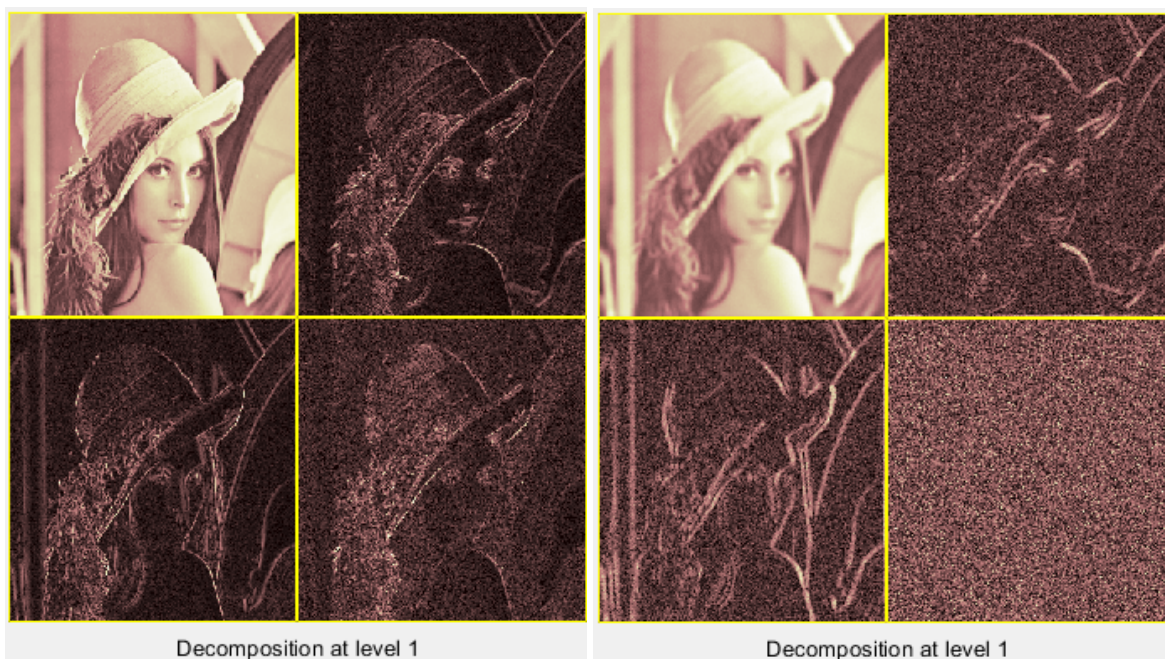
$$\phi_{x,y} = \sum_{i,j} \Delta I(i, j) - \overline{\Delta I}. \quad (3.6)$$

V našem modelovém příkladě vychází pro tuto metriku  $\phi_{x,y} \approx 7,66$  pro ostrý snímek a  $\phi_{x,y} \approx 5,13$  pro rozmazaný, popřípadě s použitím 3.5  $\phi_{x,y} \approx 201$  pro ostrý snímek a  $\phi_{x,y} \approx 31$  pro rozmazaný.

Další kategorií jsou míry ostrosti založené na diskrétní waveletové transformaci (DWT) a jejich statistických vlastnostech. Při DWT prvního řádu je snímek rozložen na 4 samostatné snímky. Rozptyl waveletových koeficientů v jednotlivých snímcích po DWT lze použít právě jako míru ostrosti [28], definujeme jako

$$\phi_{x,y} = \sum_{i,j} (W_{LH1}(i, j) - \mu_{LH1})^2 + \sum_{i,j} (W_{HL1}(i, j) - \mu_{HL1})^2 + \sum_{i,j} (W_{HH1}(i, j) - \mu_{LL1})^2. \quad (3.7)$$

V našem modelovém příkladě vychází  $\phi_{x,y} \approx 0,016$  pro ostrý snímek a  $\phi_{x,y} \approx 0,006$  pro rozmazaný. Následující příklad demonstruje, jak pomocí DWT rozpoznáme ostrost snímku.



Obrázek 3.9: Příklad DWT 1. řádu aplikovaná na ostrý (vlevo) a rozmazaný (vpravo) snímek Leny

Obrázek 3.3 jasně ukazuje, jak vypadají jednotlivé části DWT a proč se jedná o vhodnou metodu měření ostrosti. Zároveň stojí za zmínku, že není třeba omezovat se jen na waveletovou transformaci 1. řádu, někteří autoři (Huang et al.) využili i vyšších řádů DWT. Tato metoda měření ostrosti byla svého času populární primárně v automatickém ostření mikroskopů.

Další kategorií jsou statistické metody. Zde bylo představeno mnoho různých metod měření ostrosti, metody založené např. na autokorelaci stále nalézají uplatnění v systémech automatického ostření. My se zde podíváme metodu měření ostrosti založené na entropii [23, 24, 29, 30]. Zde předpokládáme, že ostřejší snímky budou obsahovat více informace. Můžeme pak k měření ostrosti použít entropii histogramu snímku definovanou jako

$$\phi = - \sum_k P_k \ln(P_k) \quad (3.8)$$

kde  $P_k$  je relativní četnost k-té intenzity. V našem modelovém příkladě vychází  $\phi \approx 7,45$  pro ostrý snímek a  $\phi_{x,y} \approx 7,38$  pro snímek rozmazaný. Entropií jakožto metrikou pro kvalitu snímku se ještě budeme zabývat později (možná).

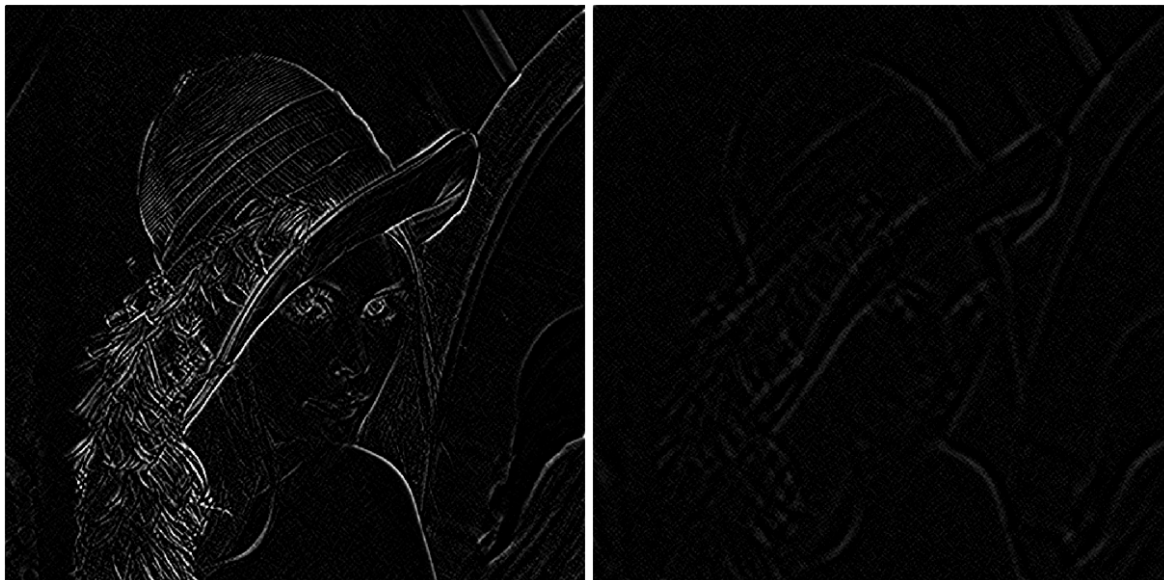
Z poslední kategorie, tedy ze skupiny metod vycházejících z diskrétní kosinové transformace, si představíme metodu DCT3. Míra ostrosti založená na DCT3 [31] je definovaná jako

$$\phi_{x,y} = \sum_{i,j} (I * M)(i, j), \quad (3.9)$$

kde  $M$  je filtr tvaru

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Podívejme se, jak konvoluce snímku s tímto filtrem vypadá.



Obrázek 3.10: Příklad DCT3 aplikovaná na ostrý (vlevo) a rozmazaný (vpravo) snímek Leny

Je evidentní, že se jedná pouze o jiný způsob detekce hran a posuzování ostrosti je prováděno na základě množství hran ve snímku. Tato metoda je podobná gradientním či Laplaceovským metodám.

Představené metody poslouží pro měření ostrosti mezi jednotlivými iteracemi dekonvoluce a také jako užitečný nástroj pro posouzení jinak subjektivní kvality zrekonstruovaných snímků. Zabývat se měřením kvality snímků má ovšem smysl ještě z jednoho důvodu. Všechny diskutované dekonvoluční algoritmy (vyjma variačního Bayesovského přístupu) jsou silně závislé na počtu iterací, což je uživatelsky zadaný parametr. U metody maxima a posteriori pravděpodobnosti ještě navíc zadáváme regularizační parametr. Většinou se ideální nastavení parametrů hledá metodou pokus-omyl. U synteticky rozmazaných snímků můžeme pro posouzení kvality využít PSNR, ovšem v kapitole 5 se budeme zabývat dekonvolucí na skutečných datech, a tam již PSNR použít nelze, nemáme totiž ground truth. Využití objektivních metrik, jež nepotřebují referenční snímek, by nám umožnilo vyladit hyperparametry pro dekonvoluci i u skutečných dat. Narazíme na poměrně očekávaný problém.

### 3.3 Detekce ringingu

V kapitole 3.1. jsme si přiblížili problém ringingu a na modelovém příkladě jsme ukázali, jak se artefakty projevují- prakticky při vysokém počtu iterací či nepřesném odhadu PSF vznikají ve snímku umělé hrany. Zároveň jsme v části 3.2 ukázali, že většina metod pro měření ostrosti předpokládá, že ostrý snímek bude mít více hran než snímek rozmazaný, což znamená, že metody měření ostrosti nerozpoznají vznik artefaktů ve snímku, vznikající nové umělé hrany budou interpretovány jako neustále rostoucí ostrost. Potřebovali bychom tedy nějakým způsobem detekovat a ideálně i kvantifikovat množství artefaktů ve snímku, bylo by to užitečné zastavovací kritérium při dekonvoluci a také bychom mohli lépe vyladit regularizační parametry. Toto je obecně neřešitelný problém, neexistuje způsob jak rozhodnout, jestli nové hrany patří do zrekonstruovaného snímku, nebo jestli se jedná o artefakt. Někteří autoři navrhovali pro dekonvoluci změnit vzorkování [32], jiní k tomuto problému přistupovali skrze frekvenční analýzu PSF [33] či separaci ringingu [34]. V literatuře se dokonce někteří autoři pokusili definovat pojem "otravnost ringingu"[35].

My se zde ale zabýváme velmi specifickým druhem snímků, máme tmavé pozadí a na něm rozmístěné bodové zdroje. Pokusíme se těchto aspektů využít.

Budeme nyní experimentovat na jednom ze snímků pořízených pro experimentální část, kvůli šumu jsou náchylnější na ringingu, a úmyslně použijeme mírně chybný odhad PSF pro dekonvoluce, abychom si ringingu vynutili už pro nízký počet iterací. Použitý snímek je mlhovina M27. Provedeme dekonvoluci neregularizovaným Richardson-Lucyho algoritmem.





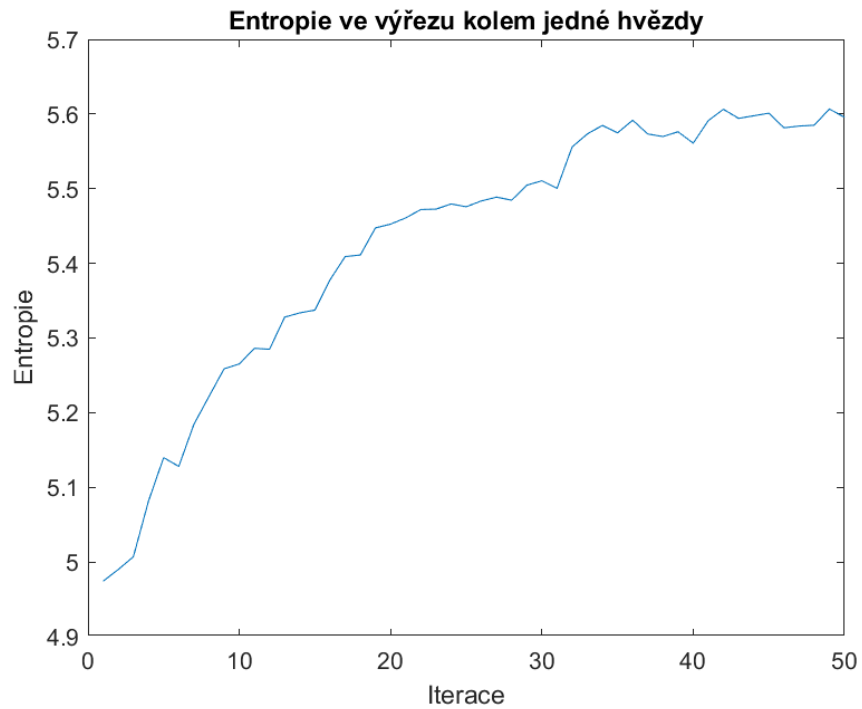
Obrázek 3.11: Vlevo výřez ze snímku mlhoviny M27, vpravo po dekonvoluci s chybnou PSF pro vynucení ringingu

První, co se nabízí pro detekci ringingu, je využití míry ostrosti založené na entropii, definované v 3.8. Ovšem namísto toho, abychom měřili entropii v celém snímku, budeme měřit entropii pouze v malém výřezu kolem hvězd. Myšlenka detekce artefaktů spočívá v tom, že při několika počátečních iteracích bude entropie klesat, hvězda se bude zmenšovat a blížit se bodovému zdroji. Poté se začnou objevovat artefakty, které způsobí, že entropie opět začne růst. Tento přístup bohužel funguje pouze teoreticky, na simulovaných datech s perfektně černým pozadím bez šumu. Podívejme se na postup vzniku ringingu v průběhu dekonvoluce, vybereme jednu hvězdu.



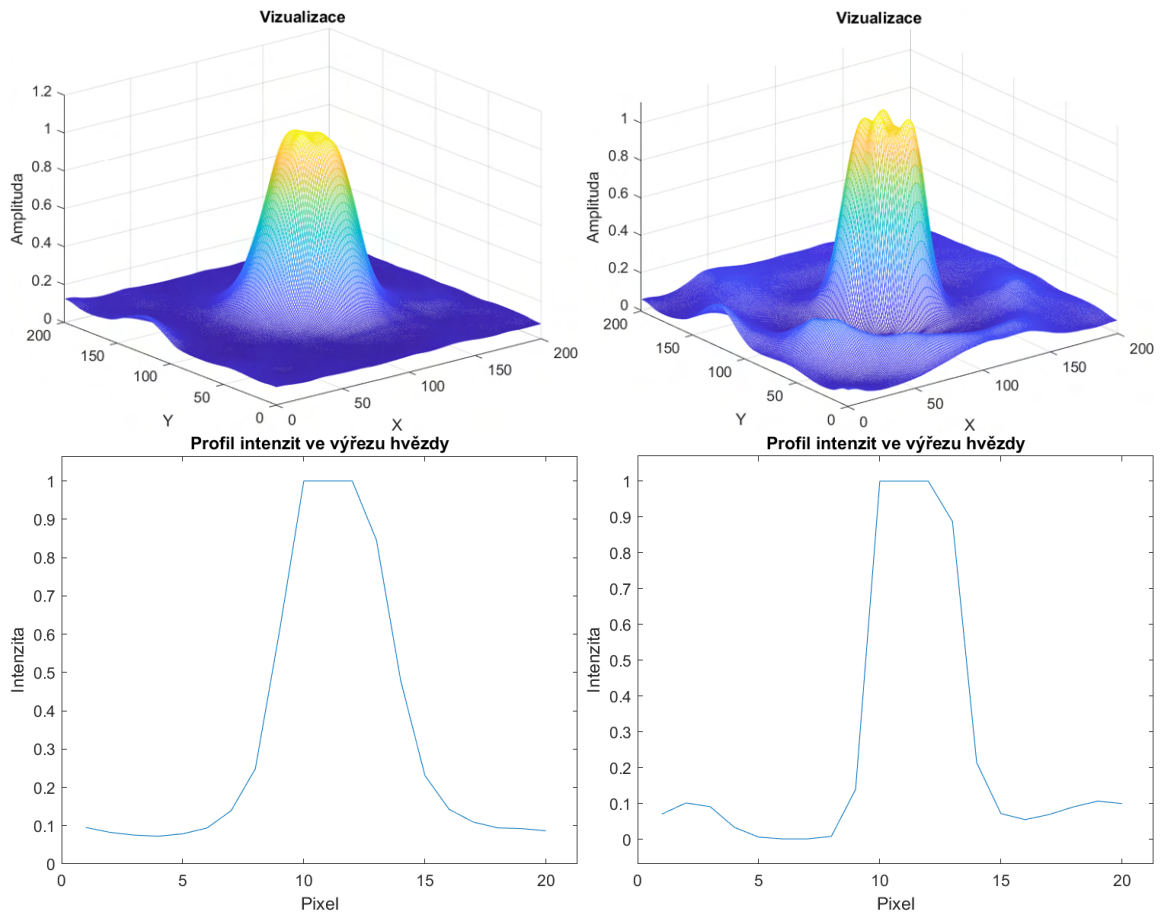
Obrázek 3.12: Proces vzniku ringingu zachycený na jedné vybrané hvězdě. Snímky jsou po 1, 10, 30 a 50 iteracích

Na obrázku 3.12 můžeme pozorovat, proč detekce ringingu pomocí entropie nebude v praxi fungovat. Dekonvoluce výrazně ovlivňuje i pozadí snímku, amplifikuje šum a při chybné PSF se sice s každou iterací hvězda blíží k  $\delta$ -funkci, ale zároveň dochází k degradaci pozadí, které nikdy není úplně černé. Podívejme se na vývoj entropie ve výřezu kolem hvězdy.



Obrázek 3.13: Vývoj entropie ve výřezu kolem jedné vybrané hvězdy při dekonvoluci Richardson-Lucyho algoritmem

Entropie bude skutečně pouze růst. Chování hvězd při dekonvoluci v obrázku 3.12 nám spolu s faktem, že pozadí astronomických snímků nikdy není úplně černé, poskytuje nápovědu jak k problému identifikace přistoupit. Vykresleme si intenzity hvězdy po jedné a po 50 iteracích.



Obrázek 3.14: Intenzity a profily intenzit vybrané hvězdy po dekonvoluci, vlevo 1 iterace, vpravo 50 iterací

Obrázky 3.12 a 3.14 nám přibližují, co se při vzniku ringingu děje. Nejen že vznikají jasné oblasti symetricky kolem ostrých hran, ale také mezi touto oblastí vyššího jasu a samotnou hranou klesá intenzita k nule. To je velká nápověda, můžeme totiž předpokládat, že jas pozadí je konstantní a při extrakci PSF ze snímku musíme intenzitu pozadí odhadnout a odečíst, abychom získali PSF konzistentní s definicí 1.3. Víme tudíž, jaká je nejnižší možná hodnota jasu ve zkoumaném snímku. Všechny pixely s hodnotou jasu nižší, než je jas pozadí, musejí tedy být důsledek ringingu. To je pro nás velmi užitečné, nejen že můžeme na základě této informace určit míru artefaktů ve snímku, můžeme dokonce určit, kde přesně se tyto artefakty nacházejí.

**Poznámka:** To, že všechny pixely s jasnem nižším, než je jas pozadí, jsou důsledek vzniku ringinu, nemusí být nezbytně pravda, existuje jedna velmi nepravděpodobná výjimka, a sice absorbní spektra některých objektů.

Můžeme tedy definovat, že pixel  $I(x, y)$  je artefakt právě tehdy když

$$I(x, y) - \min(\tilde{B}) \leq \epsilon, \quad (3.11)$$

přičemž  $\tilde{B}$  je vektor jasů pozadí odhadnutých v různých částech snímku a  $\epsilon$  je parametr potlačující vliv šumu na identifikaci ringingu.

Experimentálně se osvědčilo volit  $\epsilon = \sqrt[4]{\text{Var}(\tilde{B})}$ , tedy odmocninu směrodatné odchylky naměřených jasů pozadí. Aplikujeme tento přístup na zrekonstruovaný snímek v obrázku 3.11.



Obrázek 3.15: Detekované oblasti (zvýrazněné červeně) s výrazným ringingem

Vidíme, že tento přístup dokáže identifikovat polohu artefaktů ve snímku, ovšem pořád má svoje limity. Vůbec nedetekuje ringing uvnitř struktur, tj. uvnitř mlhovin, hvězdokup a podobně. To je způsobeno faktem, že v místech, kde se takové objekty nacházejí, nelze spolehlivě určit jas pozadí. Ze stejného důvodu jsou i hvězdy uvnitř těchto objektů vynechány při odhadování PSF. Dále také velmi záleží na parametru  $\epsilon$ , při špatné volbě se může stát, že jako artefakt bude označen každý pixel, popřípadě žádný pixel. Jak dobře je volba  $\epsilon = \sqrt[4]{\text{Var}(\tilde{B})}$  přenositelná mezi různými snímky, prozkoumáme v experimentální části, ovšem jak je z obrázku 3.15 patrné, nezachycujeme propady v jasů kolem hvězd úplně. Abychom ringing získali celý, museli bychom zvýšit hranici detekce, což ovšem způsobí, že bude za artefakt označena i velká část pozadí samotného.

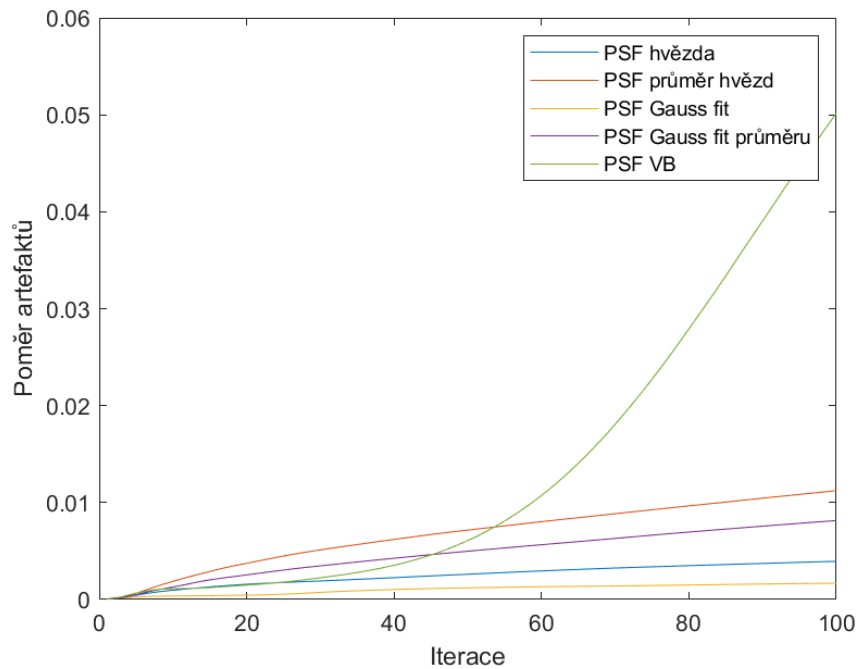
Přes tyto limity je tento přístup k detekci artefaktů užitečný. Umožní nám totiž navrhnout vlastní míru ostrosti, která bere v potaz vznik artefaktů, díky čemuž můžeme navrhnout zastavovací kritérium pro iterativní algoritmy a také posoudit kvalitu odhadnuté PSF.

Zkusíme na to tedy jít jednoduše. Kvantifikujeme ringing jako poměr zasažených pixelů vůči celkovému počtu pixelů, jež považujeme za pozadí. Vizuálně se podíváme na výsledky dekonvoluce a určíme, jaký poměr artefaktů ve snímku jsme ještě ochotni tolerovat.

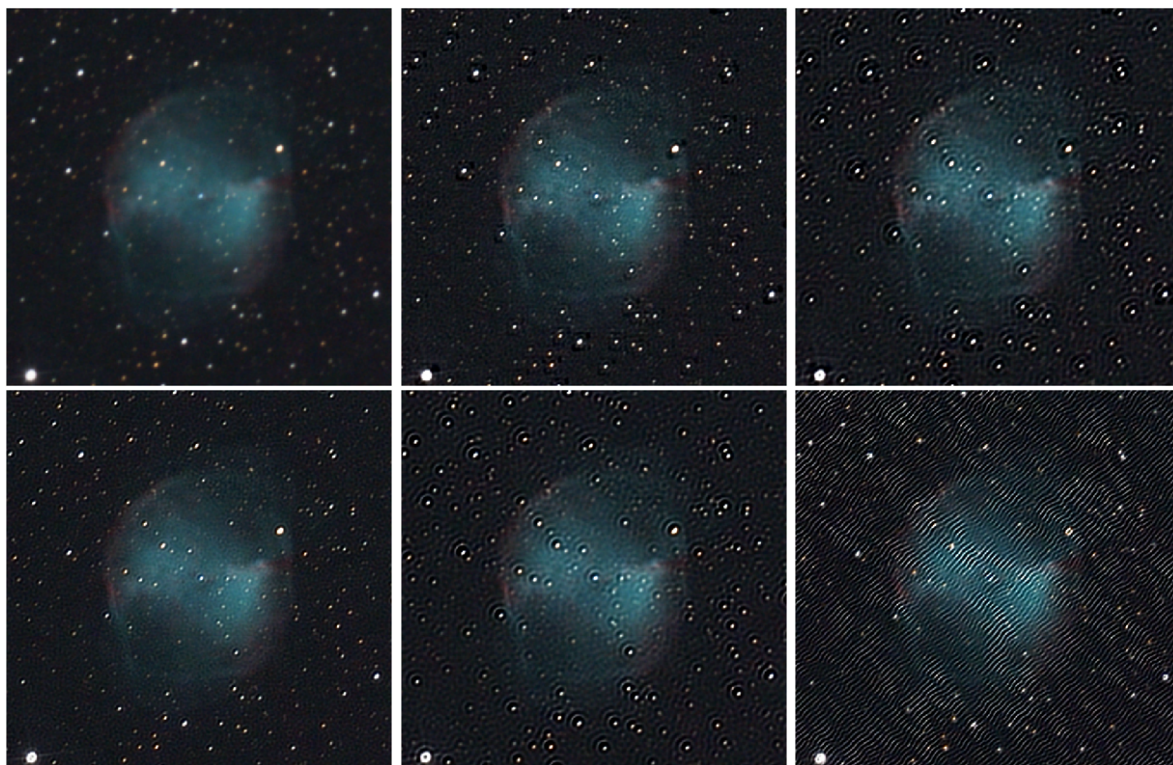
**Definice:** Označme  $R = \{I(x, y) : I(x, y) - \min(\tilde{B}) \leq \sqrt[4]{\text{Var}(\tilde{B})}\}$  množinu pixelů, jež považujeme za ringing, snímek  $I \in \mathbb{R}^{M \times N}$ .  $\tilde{B}$  je množina pixelů, které považujeme za pozadí. Definujeme míru přítomnosti artefaktů jako

$$\Lambda = \frac{\text{card}(R)}{\text{card}(\tilde{B})}. \quad (3.12)$$

Vyzkoušejme tento přístup. Odhadněme PSF (více o odhadech PSF v kapitole 4) a vypočtěme přítomnost artefaktů ve snímku v průběhu dekonvoluce pro každý odhad PSF.



Obrázek 3.16: Vývoj přítomnosti artefaktů v průběhu dekonvoluce pro různé odhady PSF



Obrázek 3.17: Srovnání dekonvoluce jednotlivými odhadnutými PSF

Vidíme, že nejlepší výsledek z grafu 3.17 i z obrázku 3.18 vychází pro Gaussovský odhad PSF. V rekonstrukci je přítomno velmi malé množství artefaktů, a ty jsou i po 100 iteracích přijatelné. Můžeme tedy odhadnout, že přijatelná míra artefaktů ve snímcích je 0,17 % z celkového počtu pixelů pozadí. Tímto způsobem můžeme získat zastavovací kritérium pro dekonvoluční algoritmy a zároveň máme účinný nástroj na posuzování kvality odhadu PSF.

V prezentovaném příkladě je vidět, že odhad PSF hraje v dekonvoluci naprosto zásadní roli. Ačkoliv se nám nepodařilo vytvořit míru ostrosti v pravém slova smyslu, vytvořili jsme jednoduchý a na výpočet nenáročný nástroj, který nám umožní srovnávat kvalitu odhadů impulzní odezvy a také získat přijatelné zastavovací kritérium pro dekonvoluci, byť se stále jedná spíše o vizuální kritérium založené na subjektivním vnímání ringingu. Tento postup vyzkoušíme v následující kapitole.

## Kapitola 4

# Experimenty se synteticky rozmazanými snímky

V této kapitole vyzkoušíme všechny diskutované metody z předchozích kapitol na 2 snímcích z Hubbleova dalekohledu. Tyto snímky jsou perfektně ostré a obsahují minimum šumu, jsou tedy vhodné pro experimenty. Snímky uměle rozmážeme, použijeme syntetické Gaussovské PSF. Budeme sledovat vývoj ostroty během dekonvoluce, vyzkoušíme také námi definovanou metodu pro kvantifikaci ringingu z kapitoly 3, a jelikož se jedná o uměle rozmazané obrázky, můžeme kvalitu dekonvoluce posuzovat pomocí PSNR. Také si představíme způsoby, kterými budeme odhadovat PSF.

**Poznámka:** Ačkoliv v kapitole 2 diskutujeme řadu algoritmů, během experimentů se ukázalo, že metoda nejmenších čtverců a Jansson-Van Citterd algoritmus nepodávají použitelné výsledky. V dalším textu a experimentech se tedy omezíme pouze na Richardson-Lucyho algoritmus, a to jak v regularizované, tak i v neregularizované verzi, a na slepou dekonvoluci s použitím variačního Bayesovského přístupu.

## 4.1 Odhad PSF



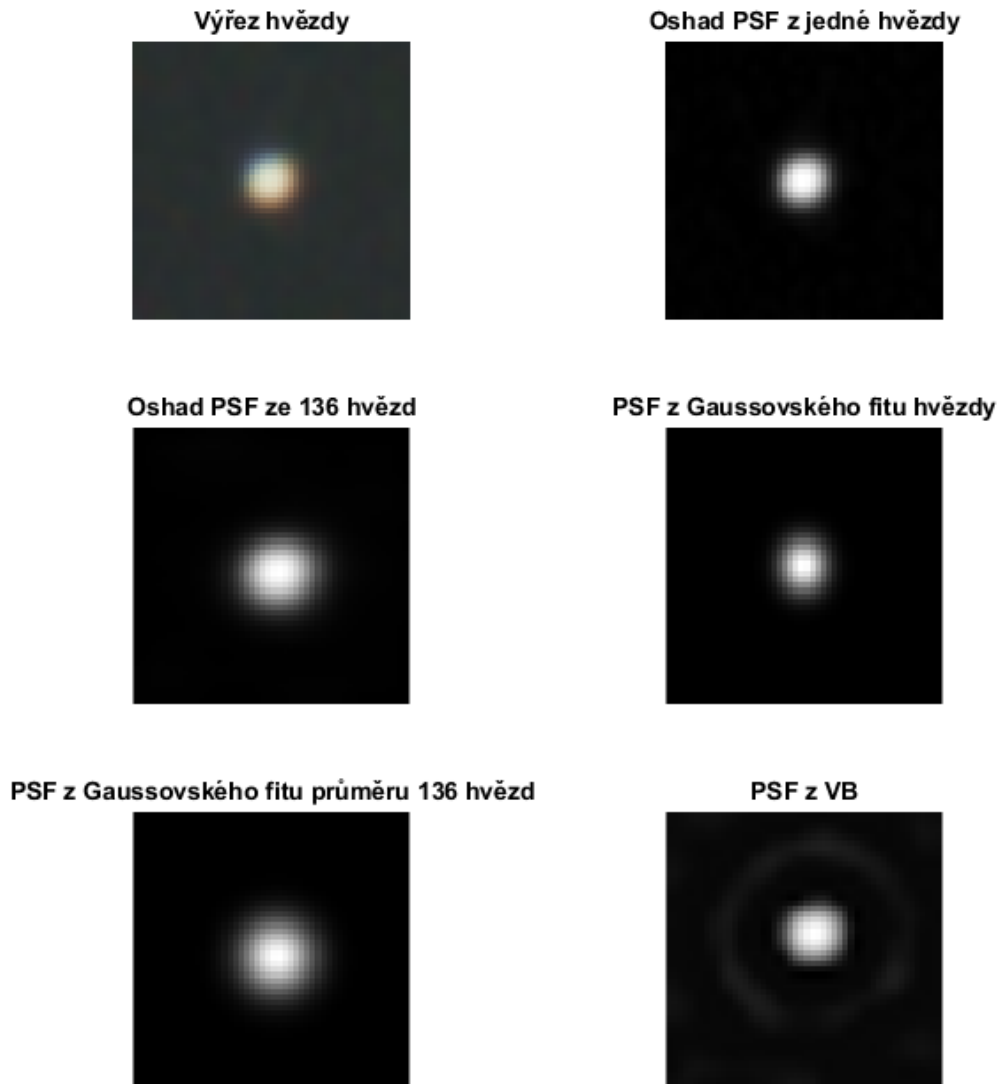
Obrázek 4.1: Mlhovina M17

Metody odhadu PSF si představíme a demonstrujeme na snímku mlhoviny M17 na obrázku 4.1. K odhadu impulzní odezvy využijeme zásadní předpoklad. Hvězdy, s ohledem na jejich velikost a vzdálenost, můžeme považovat za bodové zdroje, a tedy každá hvězda ve snímku představuje PSF. Můžeme tedy vybrat jednu vhodnou hvězdu a tu použít pro dekonvoluci. Otázkou je, jaké hvězdy považujeme za vhodné. Prvním kritériem je saturovanost, hvězda nesmí být přepálená, konvoluční model 1.1 by pak neplatil. Dalším kritériem je lokalita, nechceme vybírat hvězdy uvnitř struktur a zkoumaných objektů, u takových hvězd není možné odhadnout pozadí, které musíme odečíst. Třetím kritériem je izolovanost, chceme, aby použitá hvězda neměla v bezprostřední blízkosti jinou hvězdu. Jakmile nalezneme kandidáta, jenž splňuje tyto požadavky (v jednom snímku mohou být takových hvězd stovky), vytvoříme výřez, odečteme odhadnuté pozadí a pro omezení vlivu šumu vynulujeme všechny hodnoty pod námi nastaveným prahem. Nakonec provedeme normalizaci, aby byl náš odhad konzistentní s definicí 1.3.

Další možností jak určit PSF je zprůměrování všech hvězd, které splňují naše kritéria. Tím nadále omezíme vliv šumu a získáme přesnější odhad. Například v obrázku 4.1 je 136 vhodných hvězd, které můžeme zprůměrovat pro odhad PSF. Pro jiný odhad PSF můžeme využít faktu, že rozmázení je Gaussovského charakteru, vzniká náhodnými turbulencemi v atmosféře. Můžeme nafittovat 2D Gaussovu distribuci na některou z vhodných hvězd a z parametrů distribuce pak vytvořit PSF, případně nafittovat Gaussovo rozdělení na průměr všech vhodných hvězd. Nakonec můžeme PSF odhadnout pomocí varianční Bayesovské metody. Všechny tyto způsoby odhadu PSF vyzkoušíme a porovnáme.



Pro představu o odhadech PSF aplikujme všechny metody popsané výše na obrázek 4.1 a podívejme se, jaké výsledné impulzní odezvy získáme.



Obrázek 4.2: Různé impulzní odhady získané popsánymi metodami

Vidíme, že se jednotlivé odhady velmi liší, kvalita odhadu impulzní odezvy je naprosto zásadní pro dobré výsledky při dekonvoluci. Na obrázku 4.2 vypadá jako nejlepší odhad PSF vytvořená z jedné hvězdy, nejlépe kopíruje tvar hvězdy samotné. To ovšem není univerzální, záleží na konkrétních snímcích, úrovních šumu atp. Je zajímavé, že na reálném snímku je odhad pomocí variačního Bayesovského přístupu poměrně blízko odhadu z jedné hvězdy, akorát je v něm přítomna světlá oblast okolo samotné PSF.

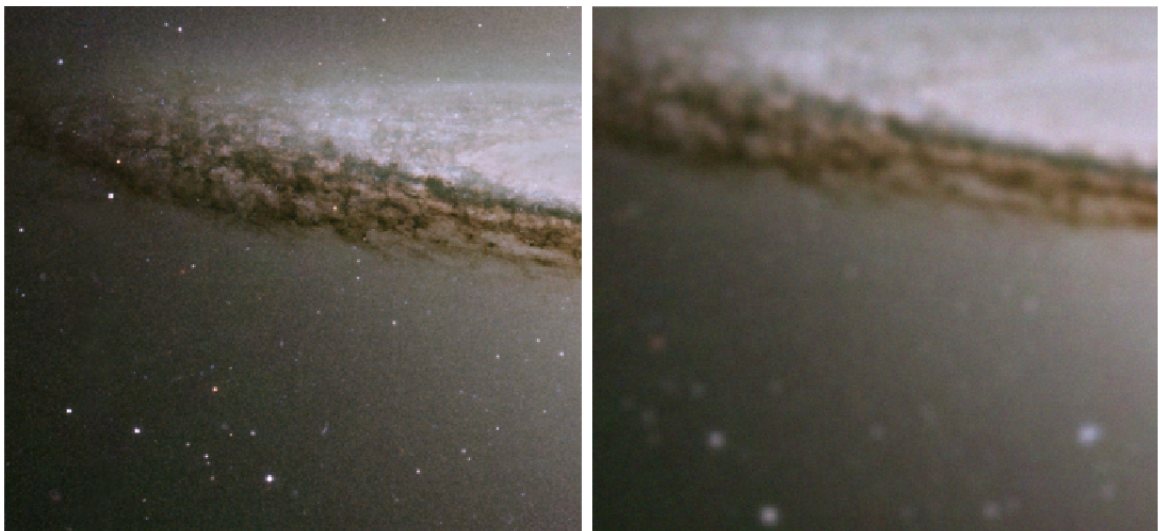
## 4.2 Dekonvoluce uměle rozmazaných snímků

První zvolený snímek je "Sombrero Galaxy" neboli M104.



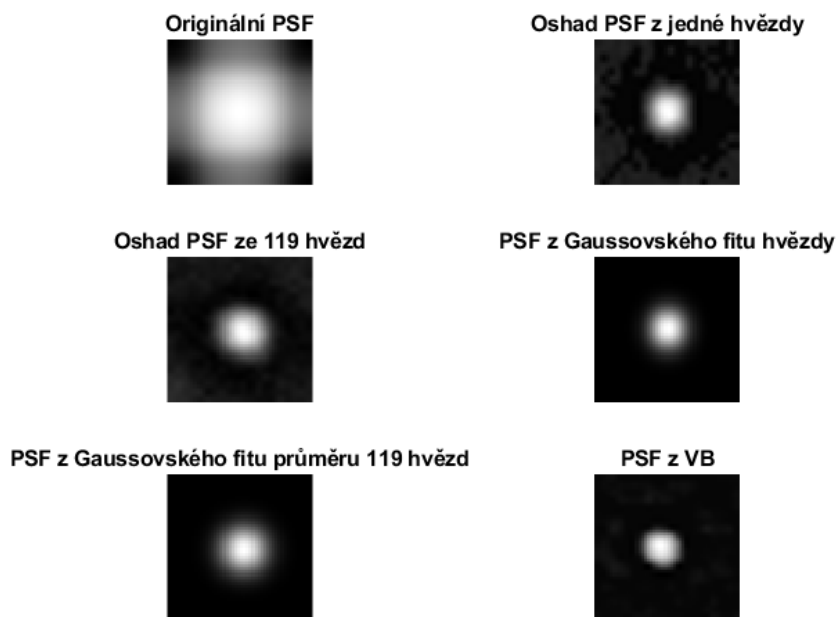
Obrázek 4.3: Snímek galaxie M104

Rozmažeme snímek 4.3 Gaussovskou PSF o velikosti  $20 \times 20$  pixelů,  $\sigma^2 = 5$ . Aditivní šum je také Gaussovský, s nulovou střední hodnotou a rozptylem 0,001. Cíleně volíme silné rozmazání. Jednak si na tomto příkladě demonstrujeme destruktivní charakter Gaussovského rozmazání, jednak uvidíme, že při opravdu velké PSF jsou naše odhady poměrně podhodnocené. Přesto rekonstrukce přináší výrazné zlepšení ostrosti.



Obrázek 4.4: Snímek galaxie M104 ve výřezu, ostrý originální snímek (vlevo), rozmazaný snímek (vpravo)

Nejprve se podíváme na odhadnuté impulzní odezvy na obrázku 4.5.



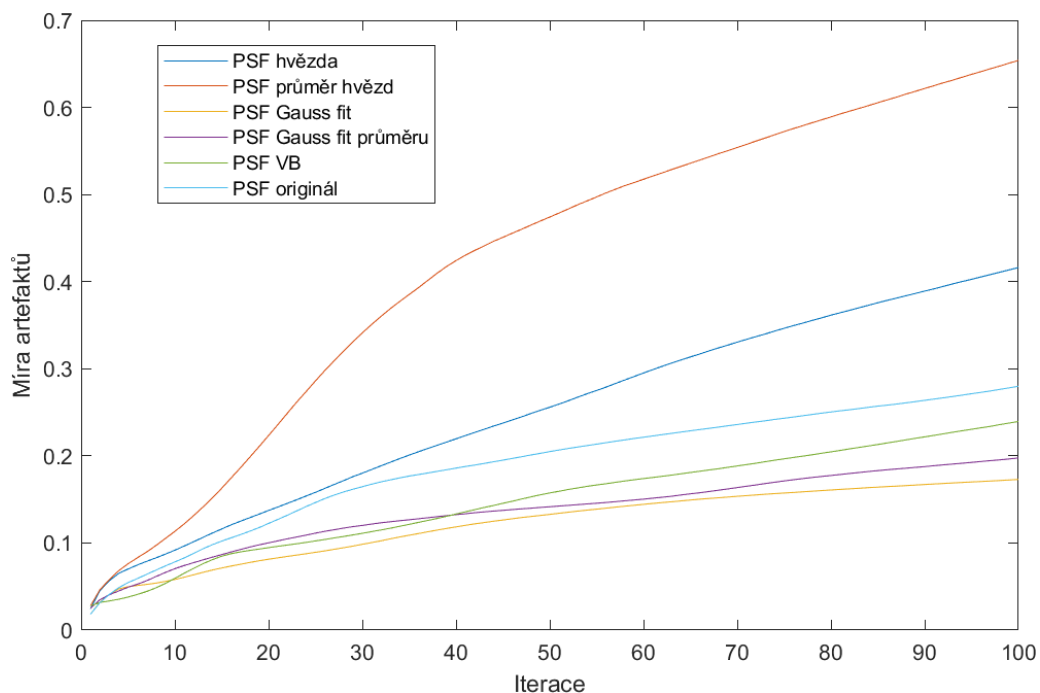
Obrázek 4.5: Odhady PSF metodami popsány v kapitole 5

Nyní použijeme neregularizovaný Richardson-Lucyho algoritmus a originální PSF použitou k rozmazání snímku. Zvolíme 100 iterací. Výsledek je na obrázku 4.6.



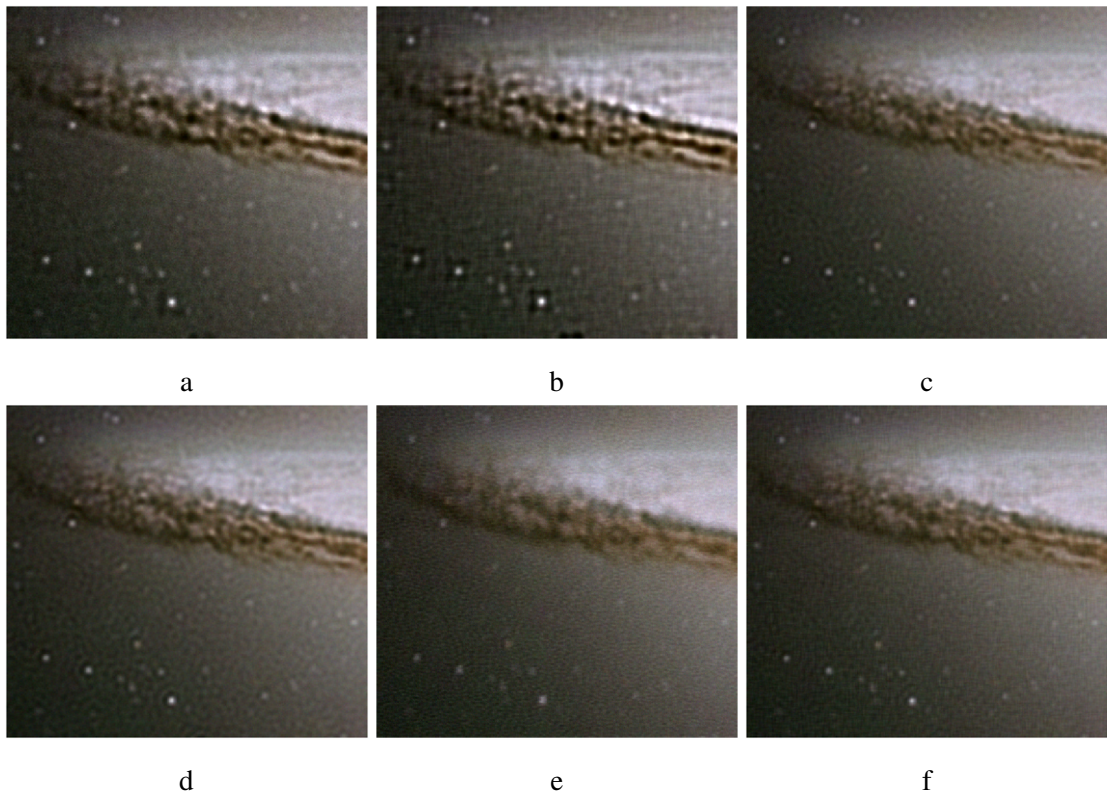
Obrázek 4.6: Dekonvoluce obrázku 4.1 neregularizovaným RL algoritmem s původní PSF, 100 iterací

Podívejme se na vývoj výskytu artefaktů za použití definice 3.12. Vývoj je zachycen na obrázku 4.7:



Obrázek 4.7: Vývoj ostrosti v průběhu 100 iterací

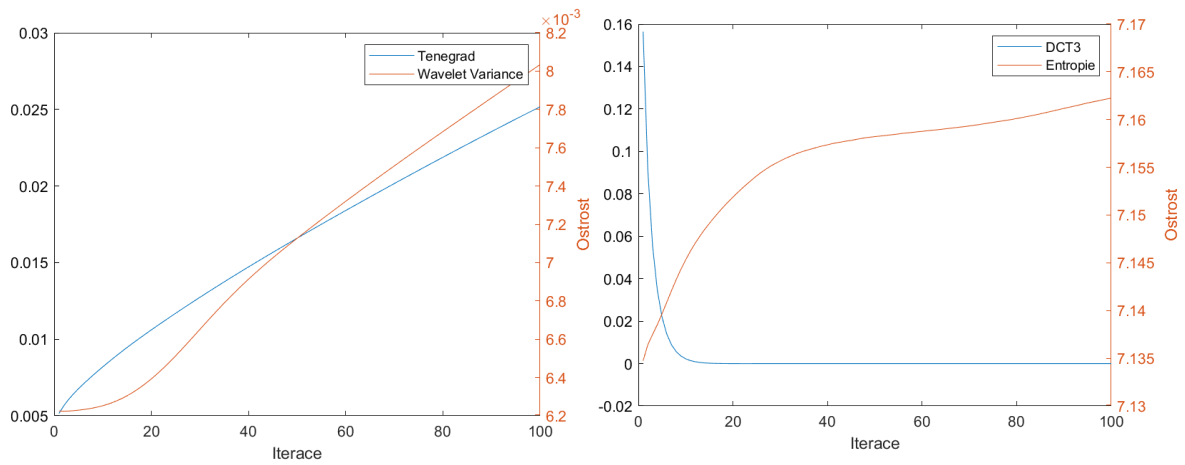
Jednoznačně nejlépe vychází PSF získaná z nafitované Gaussovské distribuce, byť v obrázku 4.5 vidíme, že žádný odhad není příliš přesný. Podobný výsledek máme i pro nafitovanou distribuci na průměr hvězd. Překvapující ovšem je, že originální PSF je až čtvrtá, co se výskytu artefaktů týče. Vizualně porovnejme ve výřezu výsledky dekonvolucí pro všechny PSF.



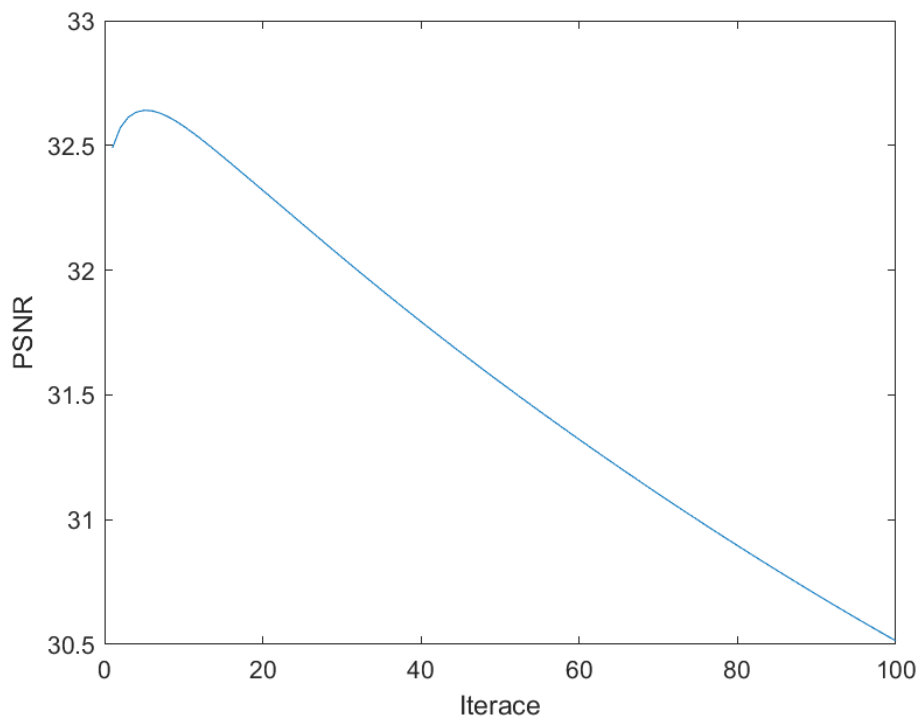
Obrázek 4.8: Srovnání dekonvoluce jednotlivými odhadnutými PSF, PSF z jedné hvězdy (a), z průměru hvězd (b), Gaussovský fit jedné hvězdy (c), Gaussovský fit průměru hvězd (d), odhad z VB (e), originální PSF (f)

V obrázku 4.8 vidíme, že výsledné rekonstrukce odpovídají tomu, co jsme zjistili v grafu 4.5. Zároveň ale zjišťujeme omezení naší metody detekce artefaktů. PSF získaná z variačního Bayesovského odhadu vykazuje méně artefaktů než originální PSF použitá k rozmazání snímku. A fakticky je to pravda, ovšem rekonstrukce samotné se již kvalitou velice liší. Snímek zrekonstruovaný s impulzní odezvou získanou variačním Bayesovským přístupem sice vykazuje méně artefaktů, ale samotná rekonstrukce je také mnohem méně kvalitní a zvýšení ostroty není tak výrazné jako u originální PSF nebo u PSF získané z Gaussovského fitu.

Nyní se ještě můžeme podívat na metriky ostroty definované v kapitole 3.2. Podíváme se na výsledky pro rekonstrukci s PSF získanou z fitu jedné hvězdy, jelikož poskytuje nejlepší výsledek rekonstrukce a má nejnižší výskyt artefaktů. Zkoumat ostrot s originální impulzní odezvou pro nás nemá význam, v kapitole 5 budeme experimentovat s reálnými daty, kde PSF není známa, budeme se tedy muset spolehnout pouze na odhady. Výsledky jsou na obrázku 4.9 níže.



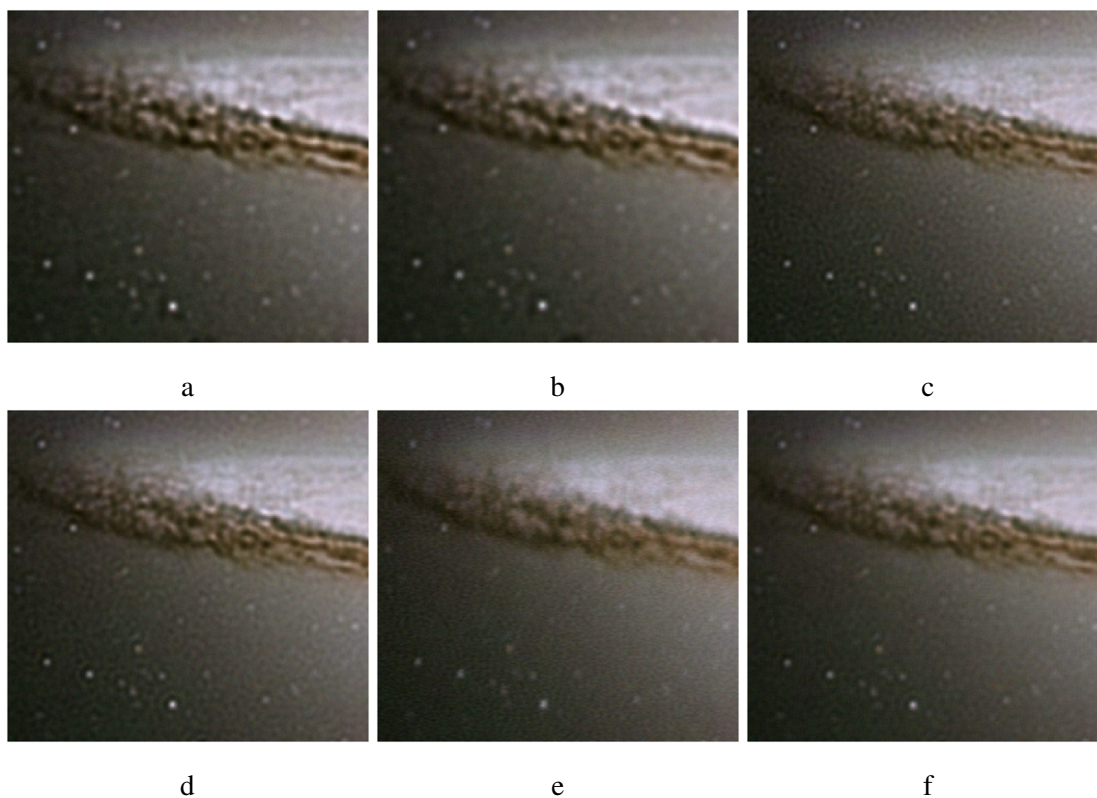
Obrázek 4.9: Vývoj ostrosti v průběhu dekonvoluce neregularizovaným RL algoritmem, 100 iterací. Tenegrad a Wavelet variance (vlevo), DCT3 a Entropie (vpravo)



Obrázek 4.10: PSNR v průběhu dekonvoluce neregularizovaným RL algoritmem, 100 iterací

Míry ostrosti se chovají dle očekávání, překvapivé je ale PSNR. Během dekonvoluce klesá, což by mělo značit zhoršující se kvalitu rekonstrukce. Vizuálně ovšem můžeme potvrdit, že kvalita snímků roste. Podle všeho objektivní metriky nejsou vhodné pro posuzování kvality rekonstrukce astronomických snímků. Amplifikaci šumu interpretují jako zhoršení kvality i přesto, že je snímek zjevně ostřejší a detailnější. Stejně výsledky dává i SSIM metrika.

Vraťme se ještě krátce ke grafu 4.7. Nejlepší rekonstrukce s PSF získanou nafitováním Gaussovské distribuce vykazuje po 100 iteracích 17 % artefaktů v pozadí, vizuálně je to přijatelné množství. Zastavme dekonvoluci s ostatními odhady PSF po dosažení této hranice.



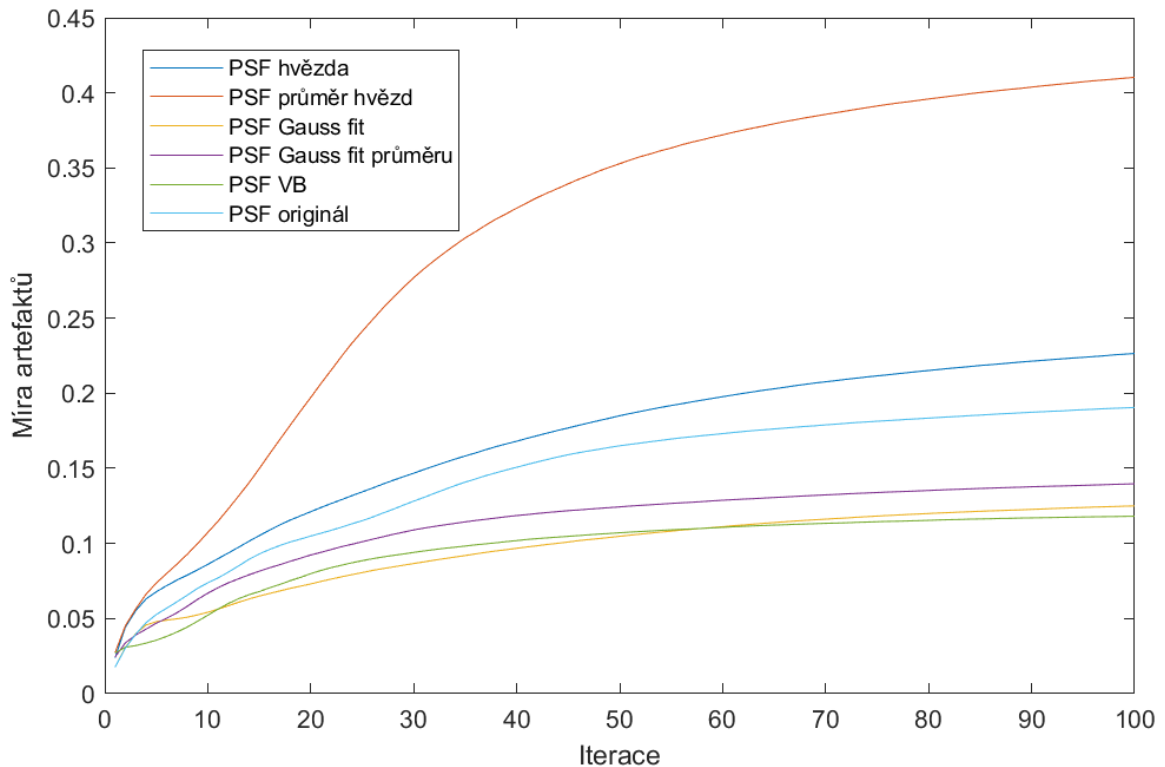
Obrázek 4.11: Srovnání dekonvoluce jednotlivými odhadnutými PSF, proces iterací skončil po dosažení  $\Lambda = 0.17$ . PSF z jedné hvězdy (a), z průměru hvězd (b), Gaussovský fit jedné hvězdy (c), Gaussovský fit průměru hvězd (d), odhad z VB (e), originální PSF (f)



Obrázek 4.12: Srovnání originálního ostrého snímku a dekonvoluce s PSF z průměru hvězd po 100 iteracích (4.8b) a po doporučeném počtu 15 iterací (4.11b)

V obrázku 4.12 vidíme, že tento přístup může být velmi účinný pro optimalizaci počtu iterací. S naším zastavovacím kritériem získáme sice menší zdánlivé doostření kvůli omezení počtu iterací, ovšem nedojde k přílišné degradaci snímku, jako je tomu v obrázku 4.8b.

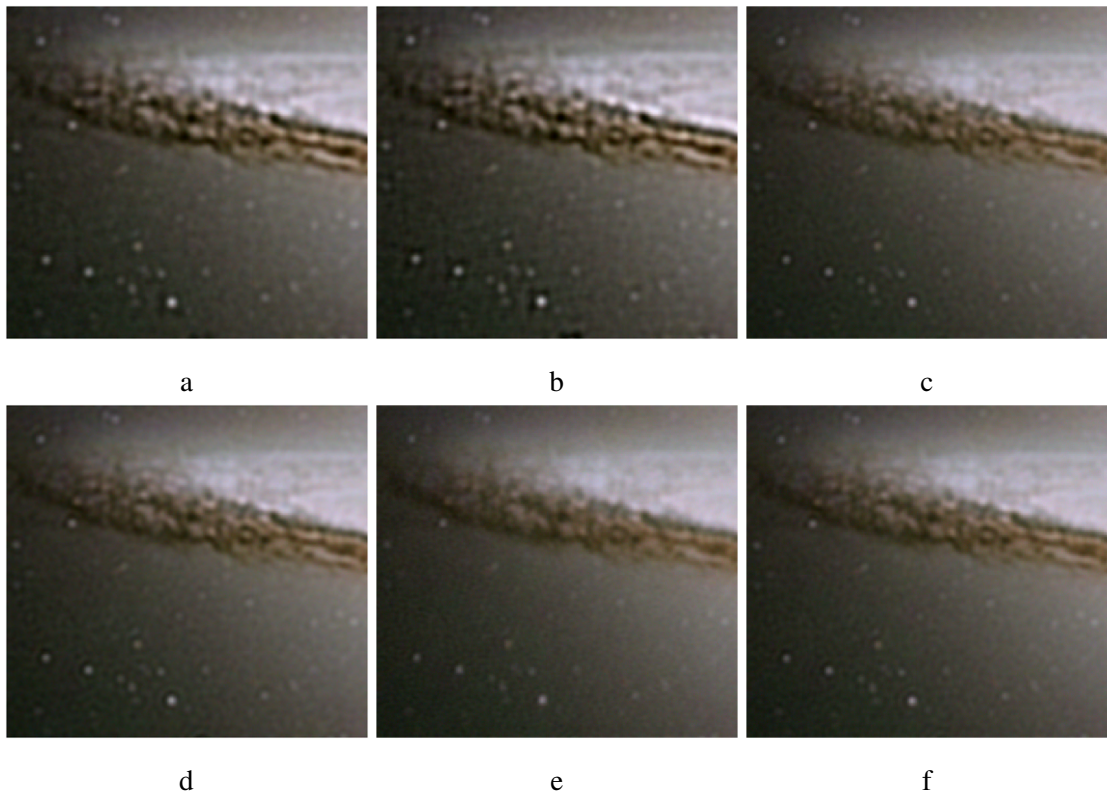
Nyní celý tento postup zopakujeme pro Richardson-Lucyho algoritmus s Tikhonov-Millerovou regularizací. Regularizační parametr je nastaven na 0.1. Vývoj výskytu artefaktů zachycuje obrázek 4.13.



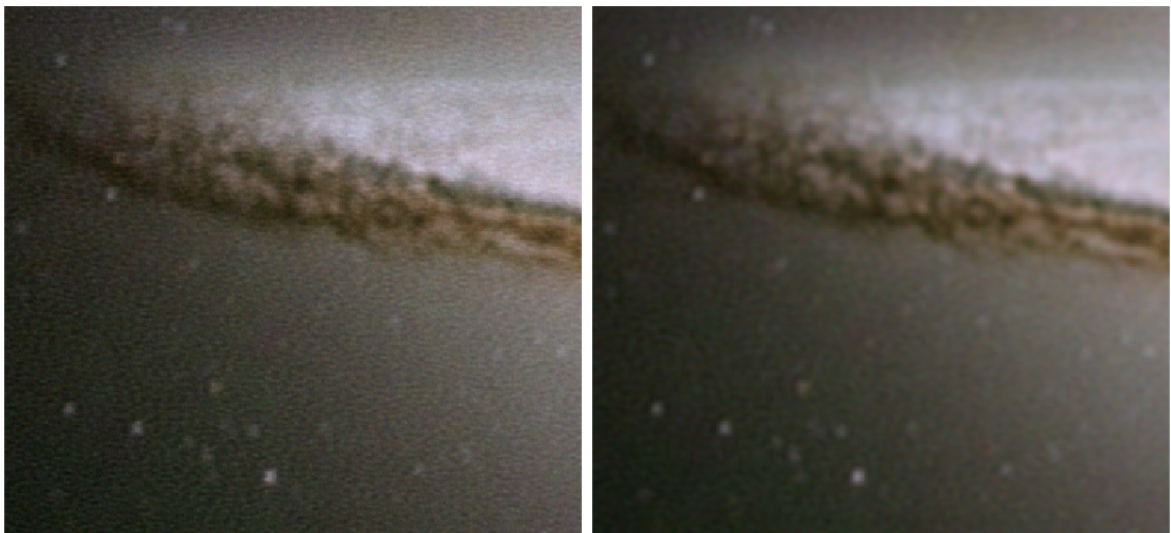
Obrázek 4.13: Vývoj výskytu artefaktů během dekonvoluce RL algoritmem s TM regularizací, 100 iterací,  $\lambda_{TM} = 0.1$

Samotný vývoj výskytu artefaktů je podobný jako v předchozím případě, ale je důležité si všimnout, jakých dosahujeme hodnot. Nejlépe tentokrát vychází PSF odhadnutá z variačního Bayesovského přístupu, po 100 iteracích je poměr artefaktů ku pozadí 0.12 oproti předchozímu případu, kdy nejnižší hodnoty vykazovala PSF z naitovaného normálního rozdělení, a to kolem 0.17. Stejně tak nejvyšší hodnoty, v případě bez regularizace dosahovaly 0.65, s TM regularizací 0.42. Je tedy vidět, že regularizace potlačuje jak šum, tak samotný ringing. To můžeme pozorovat i v obrázku 4.14, kde máme opět srovnání ve výřezu jednotlivých rekonstrukcí. Tentokrát je i kvalita rekonstrukce s PSF z VB (4.14e) mnohem lepší než v případě bez regularizace, přímé srovnání je k vidění na obrázku 4.15.



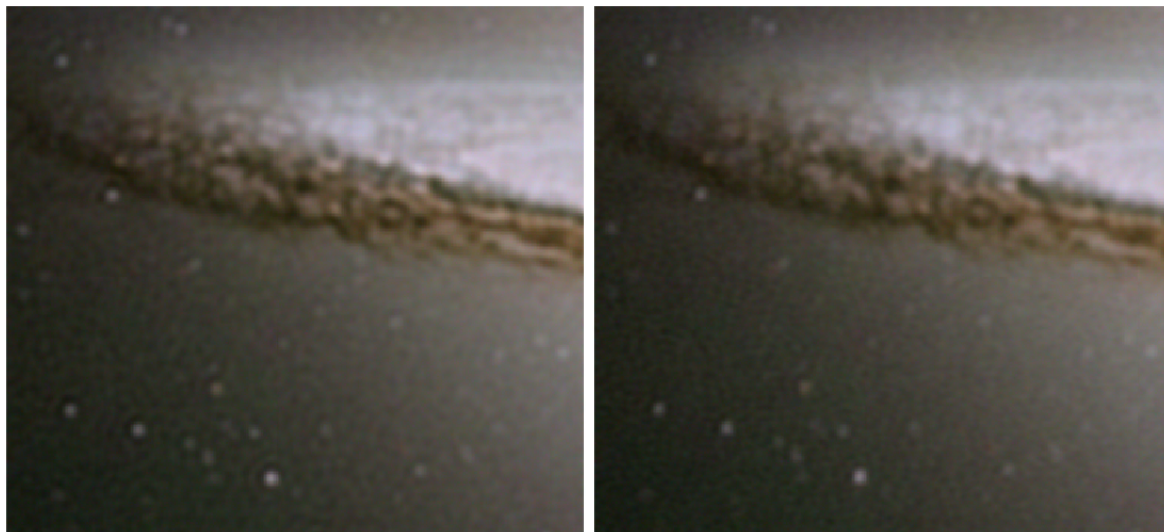


Obrázek 4.14: Srovnání dekonvoluce jednotlivými odhadnutými PSF, RL algoritmus s TM regularizací, 100 iterací,  $\lambda_{TM} = 0.1$  . PSF z jedné hvězdy (a), z průměru hvězd (b), Gaussovský fit jedné hvězdy (c), Gaussovský fit průměru hvězd (d), odhad z VB (e), originální PSF (f)



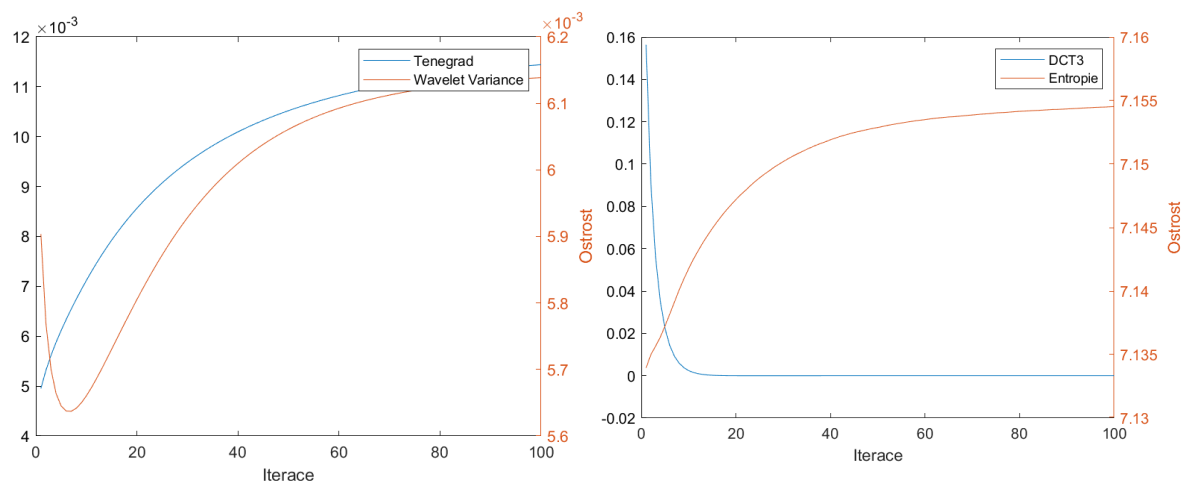
Obrázek 4.15: Srovnání nereularizované (vlevo) a regularizované (vpravo) rekonstrukce Richardson-Lucyho algoritmem, 100 iterací, PSF odhad z VB

Stojí za povšimnutí, že rekonstrukce s PSF z variačního Bayesovského přístupu vykazuje méně artefaktů a podobnou kvalitu samotného doostření jako při použití originální PSF. Rekonstrukce s originální PSF ovšem lépe zachycuje strukturu galaxie. Srovnání vidíme na obrázku 4.16 níže.

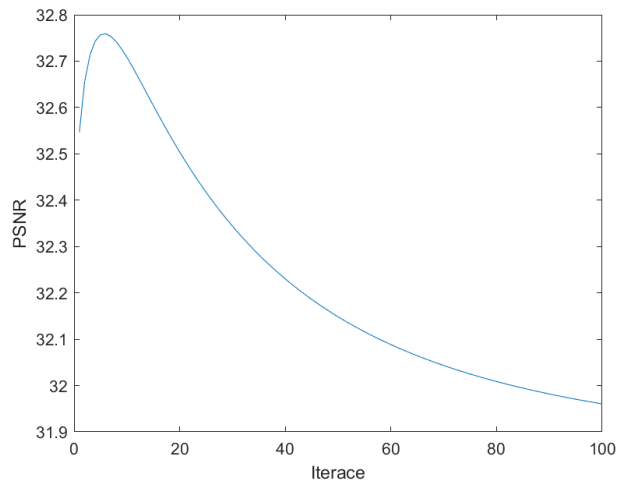


Obrázek 4.16: Srovnání rekonstrukce za použití Richardson-Lucyho algoritmu s TM regularizací, 100 iterací, původní PSF (vlevo), odhadnutá PSF z VB (vpravo)

Podívejme se nyní na metriky ostrosti v průběhu dekonvoluce s PSF získanou z VB a s regularizovaným RL algoritmem. Výsledky jsou dle očekávání podobné s předchozím případem. Stále ale vychází klesající PSNR. Výsledky jsou zachyceny na obrázcích 4.17 a 4.18.

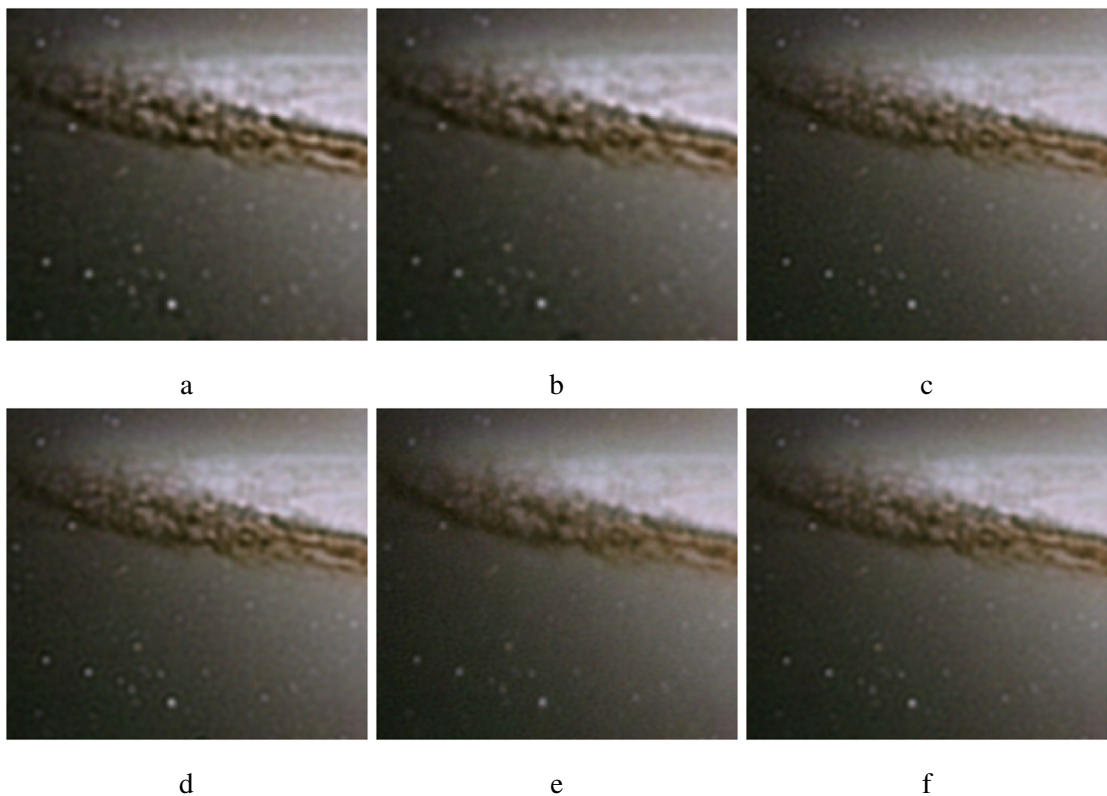


Obrázek 4.17: Vývoj ostrosti v průběhu dekonvoluce Richardson-Lucyho algoritmem s TM regularizací



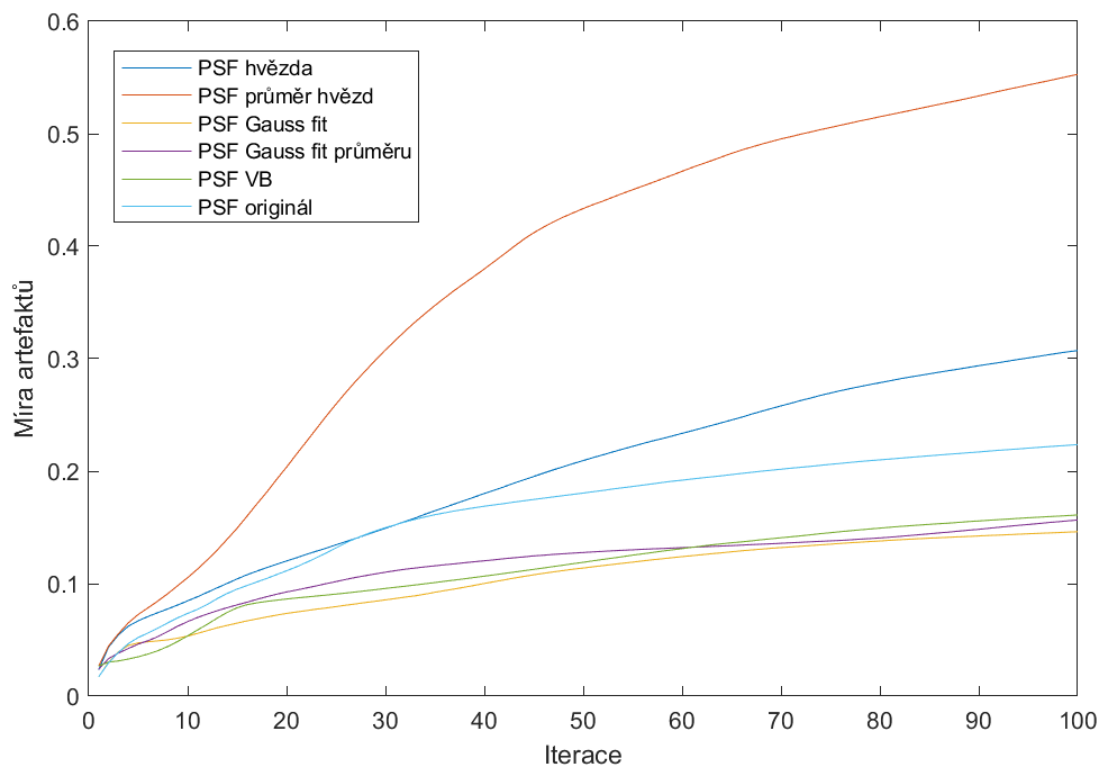
Obrázek 4.18: Vývoj PSNR v průběhu dekonvoluce Richardson-Lucyho algoritmem s TM regularizací s PSF získanou z VB, 100 iterací,  $\lambda_{TM} = 0.1$

Nakonec můžeme využít naše zastavovací kritérium z definice 3.12.



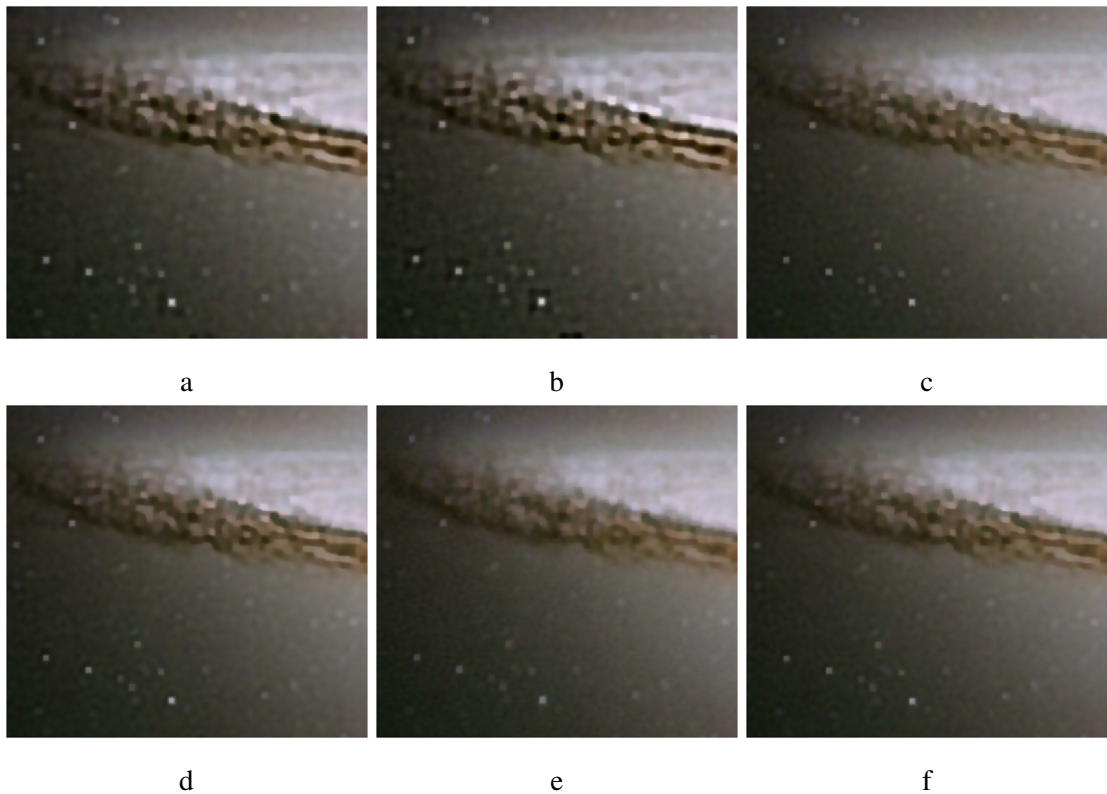
Obrázek 4.19: Srovnání dekonvoluce jednotlivými odhadnutými PSF, RL algoritmus s TM regularizací, 100 iterací,  $\lambda_{TM} = 0.1$ , kritérium  $\Lambda \leq 0.12$ . PSF z jedné hvězdy (a), z průměru hvězd (b), Gaussovský fit jedné hvězdy (c), Gaussovský fit průměru hvězd (d), odhad z VB (e), originální PSF (f)

Nakonec otestujeme Richardson-Lucyho algoritmus s TV regularizací.



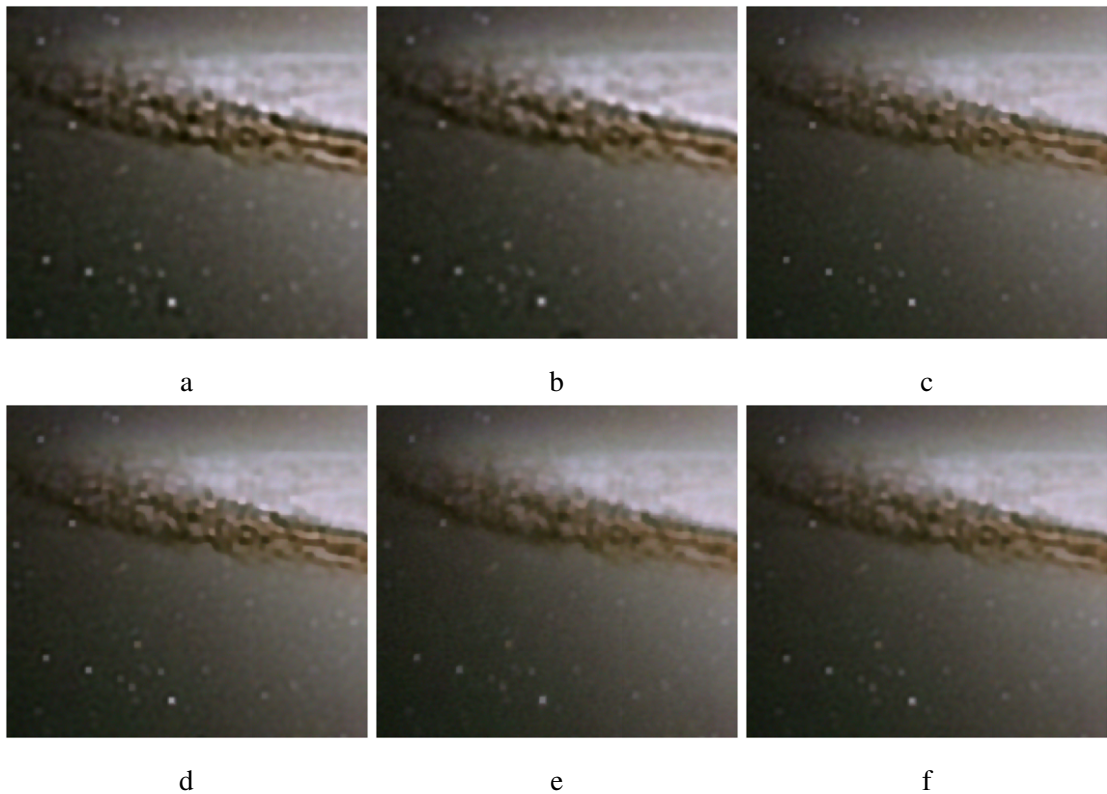
Obrázek 4.20: Vývoj výskytu artefaktů při dekonvoluci Richardson-Lucyho algoritmem s TV regularizací, 100 iterací,  $\lambda_{TV} = 0.08$

Vývoj je podobný jako v předchozích 2 případech. Co se samotného výskytu artefaktů týče, TV regularizace má o něco horší výsledky než TM regularizace. Zde, stejně jako v případě nereularizovaného Richardson-Lucyho algoritmu, vychází nejlépe PSF získaná z fitu normálního rozdělení.



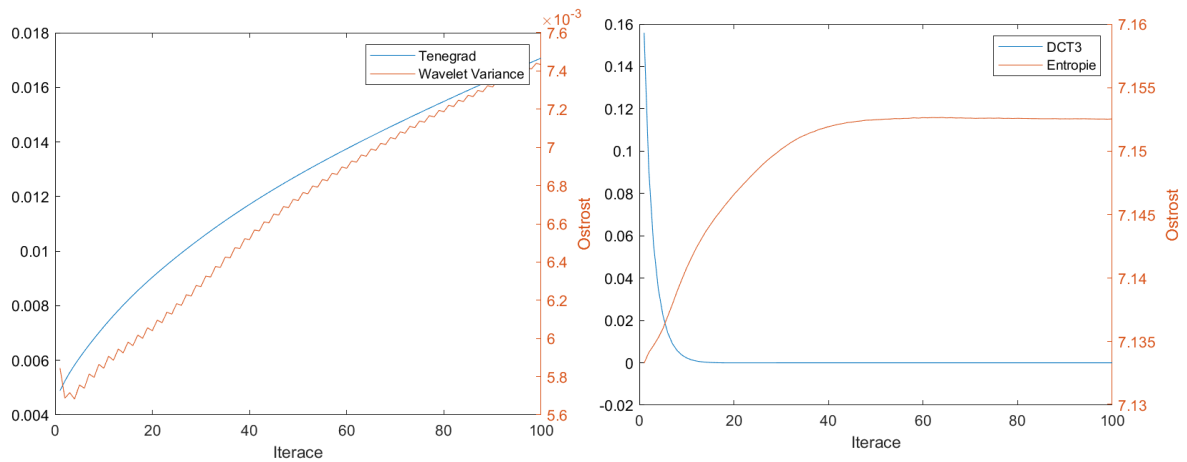
Obrázek 4.21: Srovnání dekonvoluce jednotlivými odhadnutými PSF, RL algoritmus s TV regularizací, 100 iterací,  $\lambda_{TV} = 0.08$ , kritérium. PSF z jedné hvězdy (a), z průměru hvězd (b), Gaussovský fit jedné hvězdy (c), Gaussovský fit průměru hvězd (d), odhad z VB (e), originální PSF (f)

Poněkud nečekaně TV regularizace vynucuje u hvězd čtvercový tvar, a to už při velmi slabé regularizaci ( $\lambda_{TV} = 0.02$ ), jinak jsou výsledky o poznání horší než v případě TM regularizace. Znovu vyzkoušíme dekonvoluci s námi nastaveným kritériem pro  $\Lambda$ .

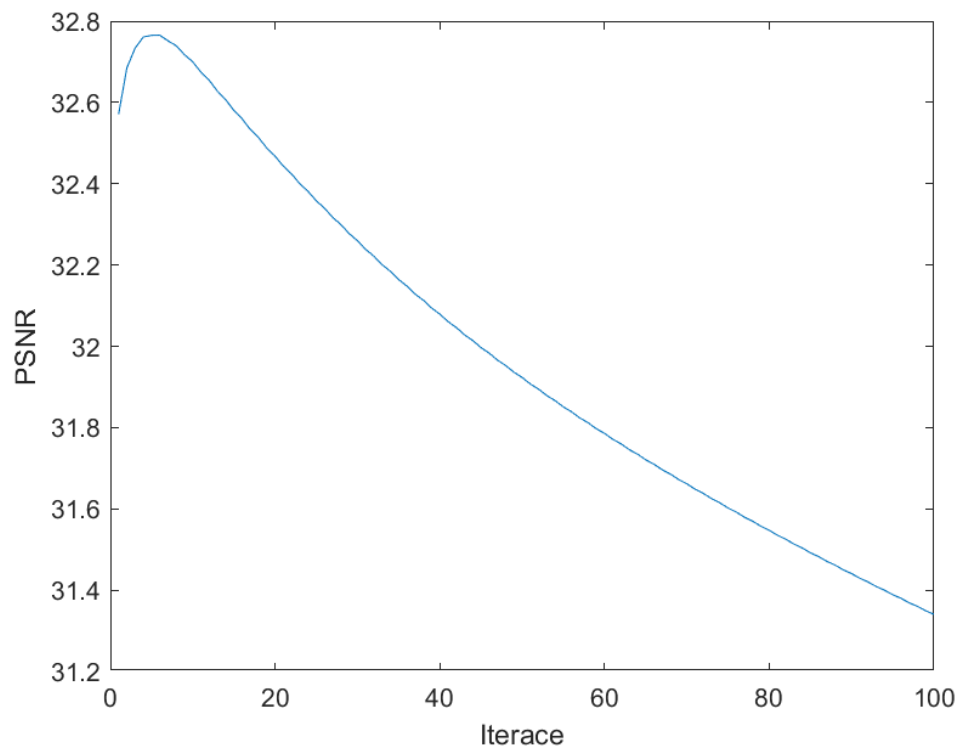


Obrázek 4.22: Srovnání dekonvoluce jednotlivými odhadnutými PSF, RL algoritmus s TM regularizací, doporučený počet iterací,  $\lambda_{TM} = 0.1$ , kritérium  $\Lambda \leq 0.14$ . PSF z jedné hvězdy (a), z průměru hvězd (b), Gaussovský fit jedné hvězdy (c), Gaussovský fit průměru hvězd (d), odhad z VB (e), originální PSF (f)

Ještě se podíváme na vývoj ostrosti a PSNR.

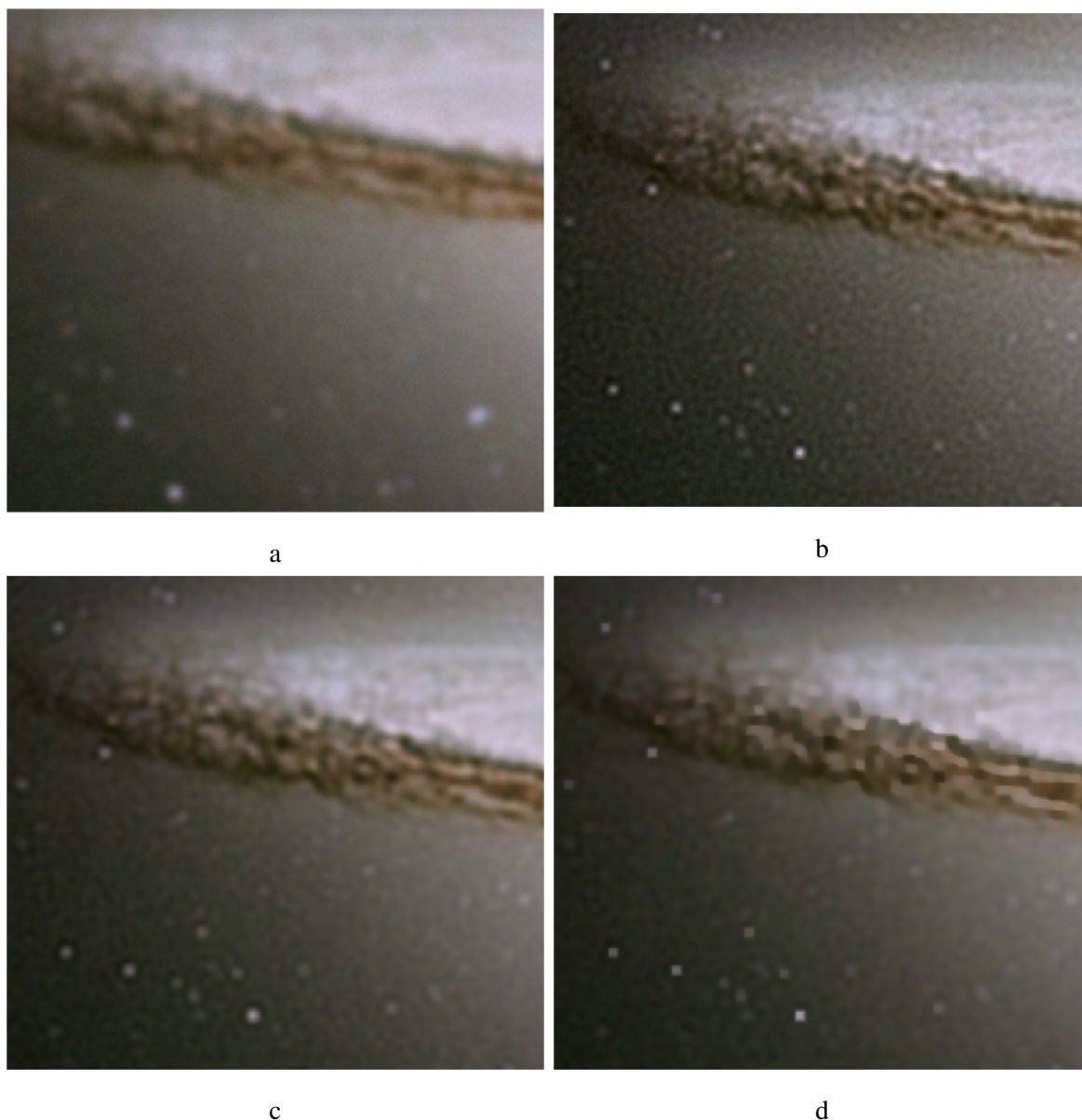


Obrázek 4.23: Vývoj ostrosti v průběhu dekonvoluce Richardson-Lucyho algoritmem s TV regularizací, PSF z fitu normální distribuce,  $\lambda_{TV} = 0.08$



Obrázek 4.24: Vývoj PSNR v průběhu dekonvoluce Richardson-Lucyho algoritmem s TV regularizací, PSF z fitu normální distribuce,  $\lambda_{TV} = 0.08$

Nakonec se ještě podívejme na srovnání ve výřezu nejlepších výsledků jednotlivých metod spolu s původním rozmazaným snímkem v obrázku 4.25.



Obrázek 4.25: Srovnání ve výřezu původního rozmazaného snímku (a), rekonstrukce neregularizovaným Richardson-Lucyho algoritmem (b), s TM regularizací (c), s TV regularizací (d)

Pro úplnost ještě vysvětleme proč nám původní PSF nedávala vždy nejlepší výsledky. Jak jsme zmínili na začátku této části, zvolili jsme velké rozmazání. Protože je Gaussovské rozmazání velmi destruktivní, vznikají artefakty i při použití správné PSF, a ty jsou často horší než rozmazání samotné. Při použití našich podhodnocených odhadů impulzní odezvy sice neodstraníme veškeré rozmazání snímku, ale ani nevzniknou destruktivní artefakty a výsledná kvalita rekonstrukce je tak vyšší.



Jako druhý experimentální snímek zvolíme mlhovinu NGC6302, a to z důvodu jiného charakteru snímku. Jedná se o mlhovinu s jemnějšími strukturami a menším počtem hvězd. V kapitole 5 se budeme zabývat dekonvolucí na reálných datech a k dispozici budeme mít výhradně snímky galaxií a mlhovin. U předchozího snímku se nám nepodařilo zrekonstruovat snímek do původního ostrého stavu, byť zlepšení po dekonvoluci bylo značné. To je dáno tím, že jsme zvolili velké rozmazání a Gaussovské rozmazání je velmi destruktivní. V praxi se budeme setkávat s mírnější degradací snímku. Zvolme tedy nyní takovou PSF, která bude lépe odpovídat tomu, s čím se setkáme v praxi. Volíme velikost jádra  $20 \times 20$  pixelů a  $\sigma^2 = 3$ . Větší jádro vybíráme z čistě praktických důvodů, zásadní je zde rozptyl.

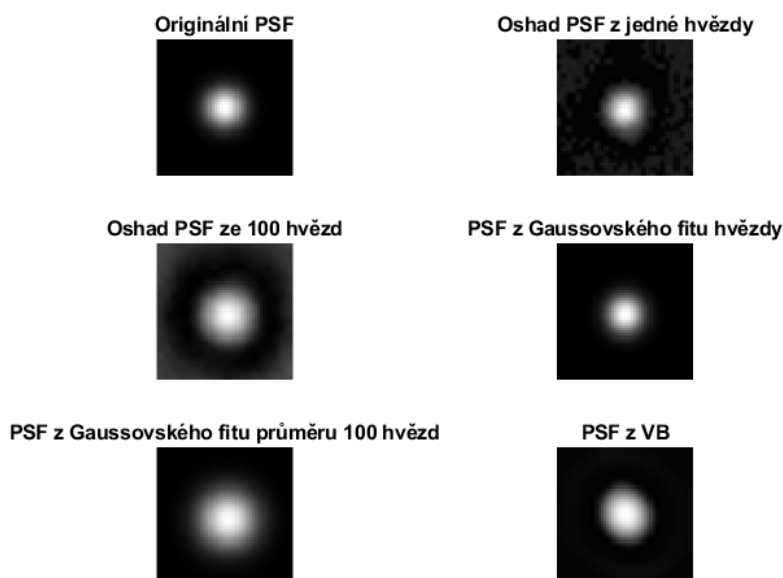


Obrázek 4.26: Mlhovina NGC6302



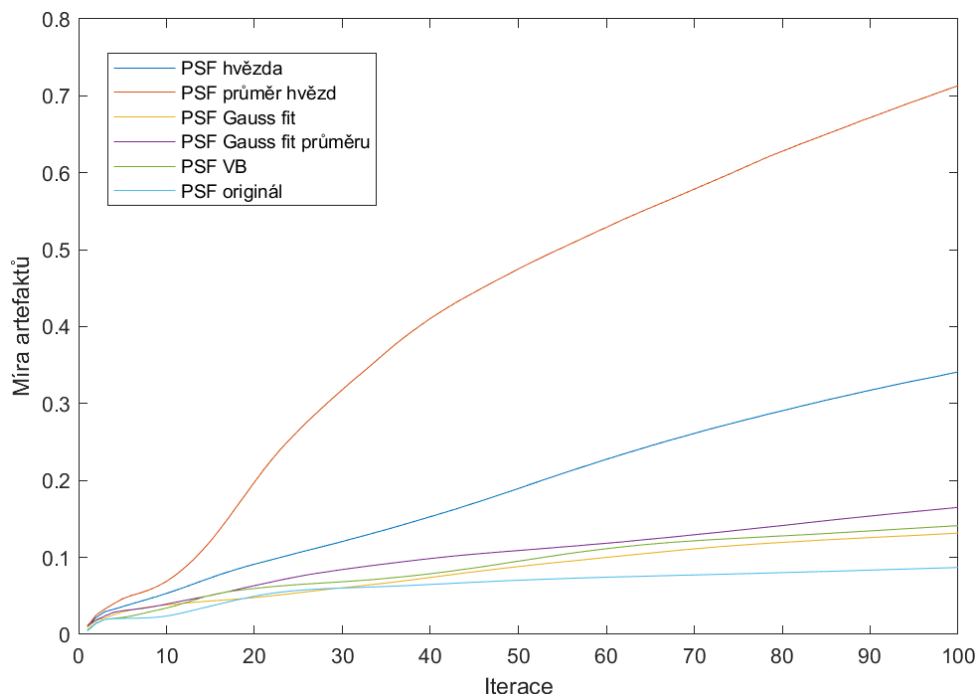
Obrázek 4.27: Srovnání ve výřezu ostrého (vlevo) a rozmazaného (vpravo) snímku NGC6302

Toto rozmazání odpovídá tomu, s čím se běžně setkáme, viz. obrázek 3.17 nebo kapitola 5. Metodologie zůstává stejná jako v případě M104, nebudeme tedy dopodrobna rozebírat každý krok. Zaměříme se spíše na samotné výsledky dekonvoluce. Také nebudeme znovu porovnávat výsledky se zastavovacím kritériem, představu o fungování tohoto postupu máme z příkladu se snímek M104. Výsledky jsou podobné, a ačkoliv nám naše kritérium může v některých případech poskytnout lepší výsledek dekonvoluce, hodí se primárně pro situace, kdy nejsme schopni kvalitně odhadnout PSF. S odhadem impulzní odezvy začneme.



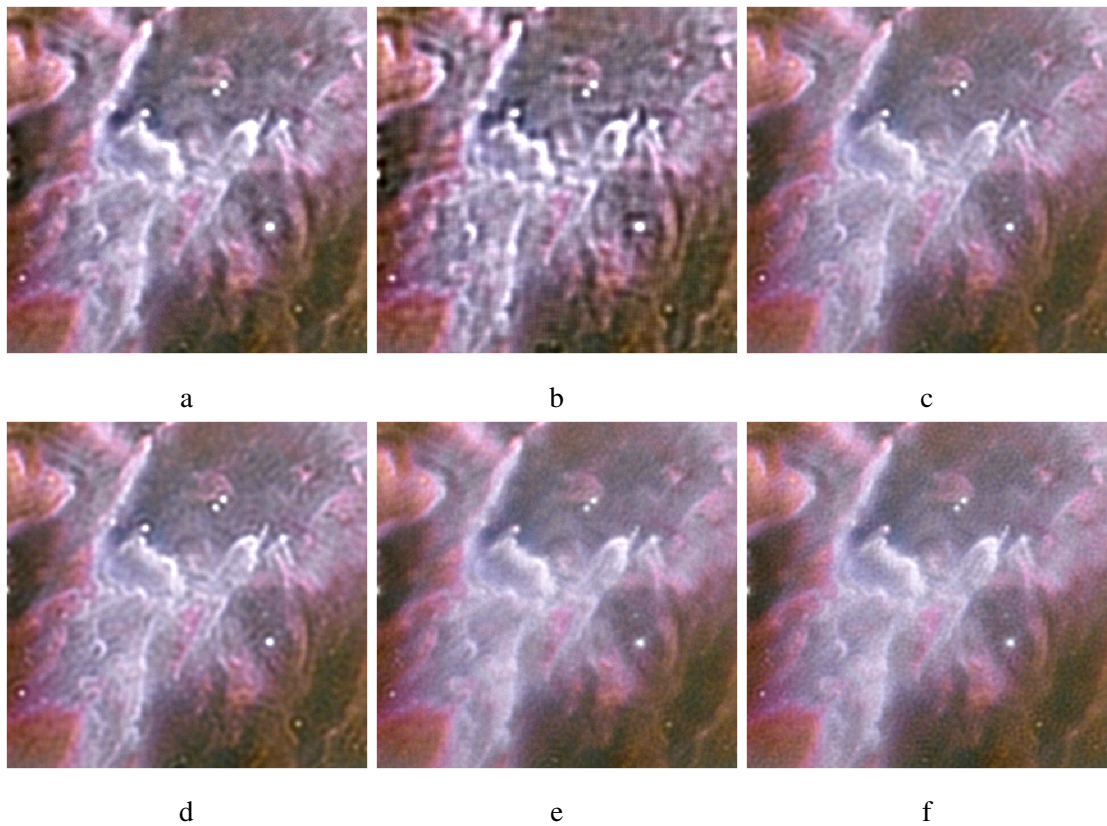
Obrázek 4.28: Jednotlivé odhady PSF použité pro dekonvoluci

Vidíme, že všechny odhady jsou poměrně blízko reálné PSF. Podívejme se na vývoj ostrosti a výsledné rekonstrukce po 100 iteracích Richardson-Lucyho algoritmu, bez regularizace.

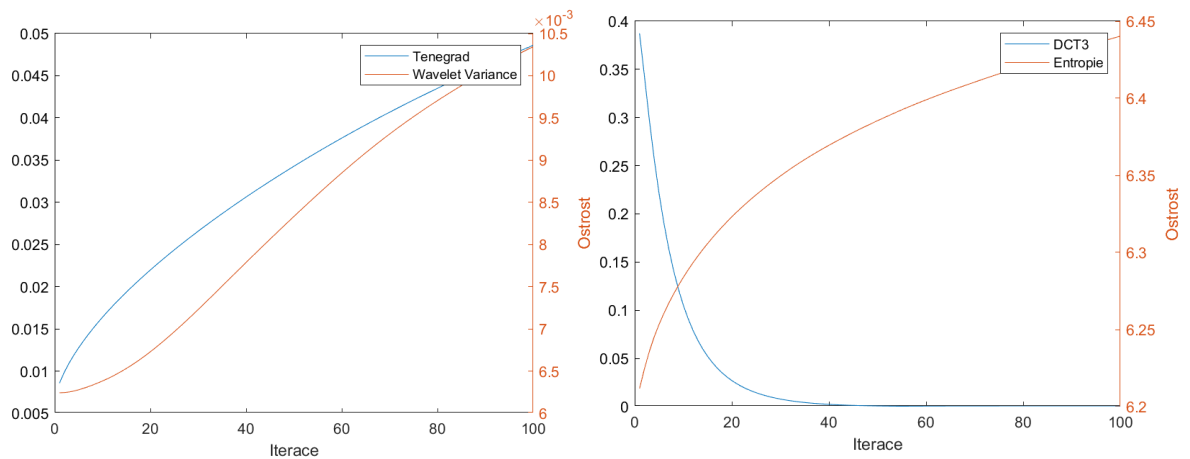


Obrázek 4.29: Vývoj výskytu artefaktů během dekonvoluce nereularizovaným RL algoritmem, 100 iterací

Nejlépe vychází originální PSF a odhad PSF z nafitovaného normálního rozdělení. Podobný výsledek máme také z variačního Bayesovského přístupu. Naopak PSF získaná z jedné hvězdy, resp. z průměru hvězd mají nejhorší výsledky. Tomu odpovídají i rekonstrukce 4.30. Dekonvoluce s impulzní odezvou z nafitovaného Gaussovského rozdělení (4.30c) a z VB (4.30e) poskytují vizuálně stejné výsledky jako s originální PSF.



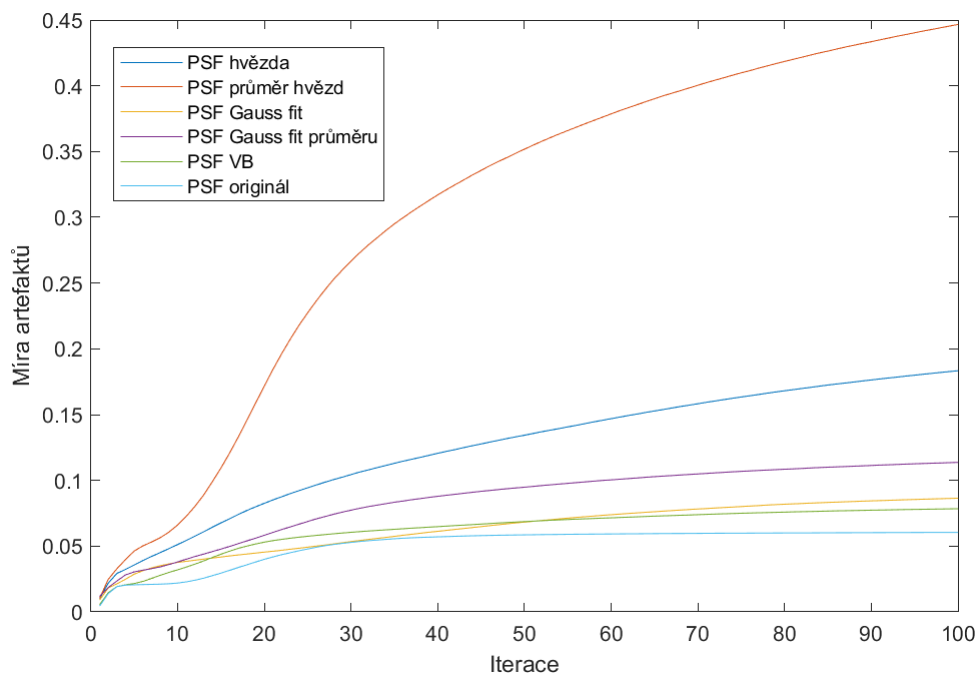
Obrázek 4.30: Srovnání ve výřezu zrekonstruovaného snímku RL algoritmem bez regularizace, 100 iterací, PSF z jedné hvězdy (a), z průměru hvězd (b), Gaussovský fit jedné hvězdy (c), Gaussovský fit průměru hvězd (d), odhad z VB (e), originální PSF (f)



Obrázek 4.31: Vývoj ostrosti v průběhu dekonvoluce neregularizovaným RL algoritmem, 100 iterací, PSF z VB (4.30e)

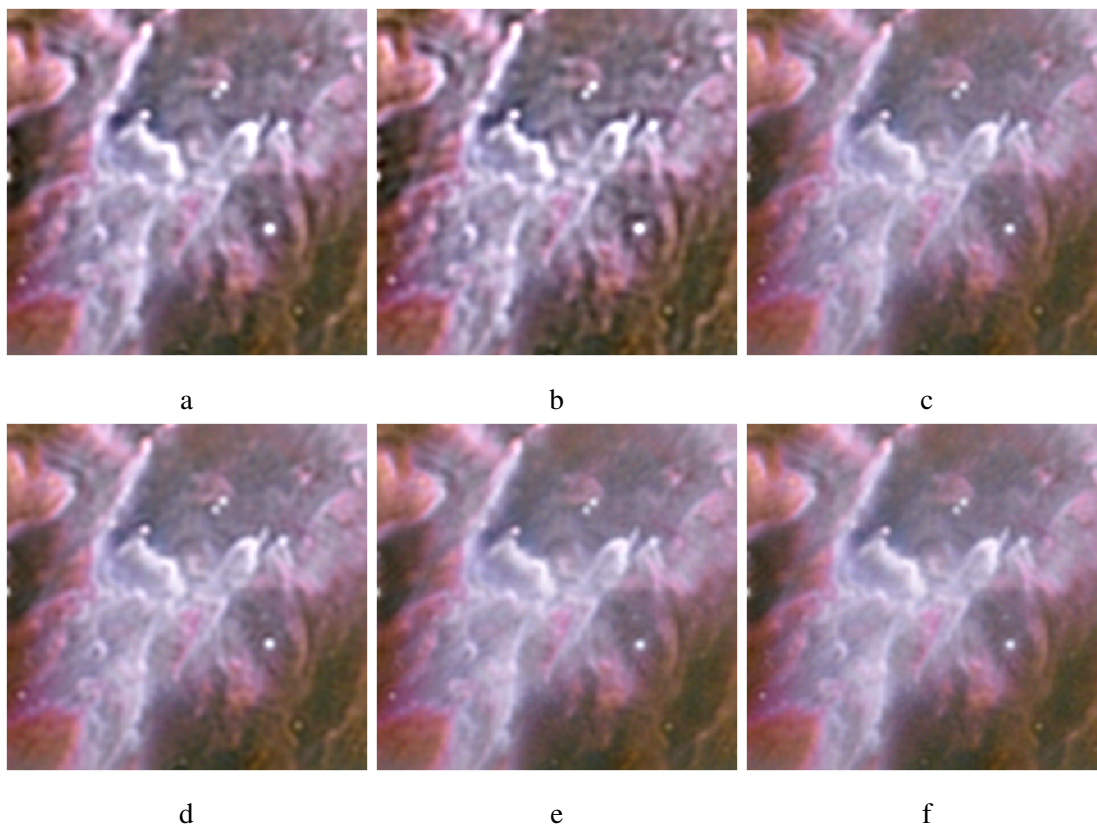
**Poznámka:** PSNR pro všechny rekonstrukce vychází klesající, nemá tedy pro nás žádný přínos a nebudeme ho nadále uvádět. V případě zájmu jsou grafy všech metrik k nahlédnutí v příloze.

Dále vyzkoušíme Richardson-Lucyho algoritmus s TM regularizací.

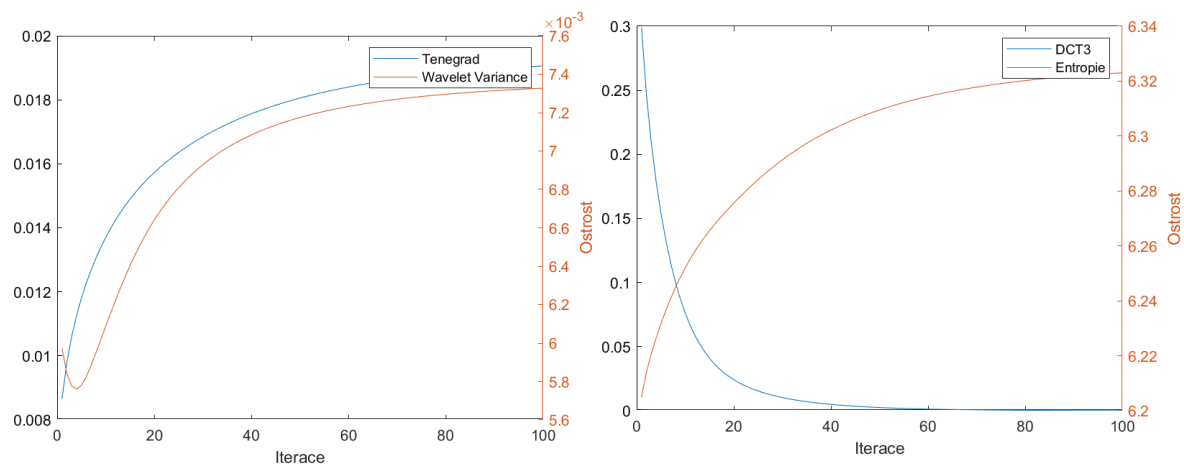


Obrázek 4.32: Vývoj výskytu artefaktů při dekonvoluci Richardson-Lucyho algoritmem s TM regularizací, 100 iterací,  $\lambda_{TM} = 0.1$

Výsledky jsou opět velmi podobné, TM regularizace potlačuje šum a artefakty a v absolutních číslech vychází  $\Lambda$  pro všechny PSF značně nižší.

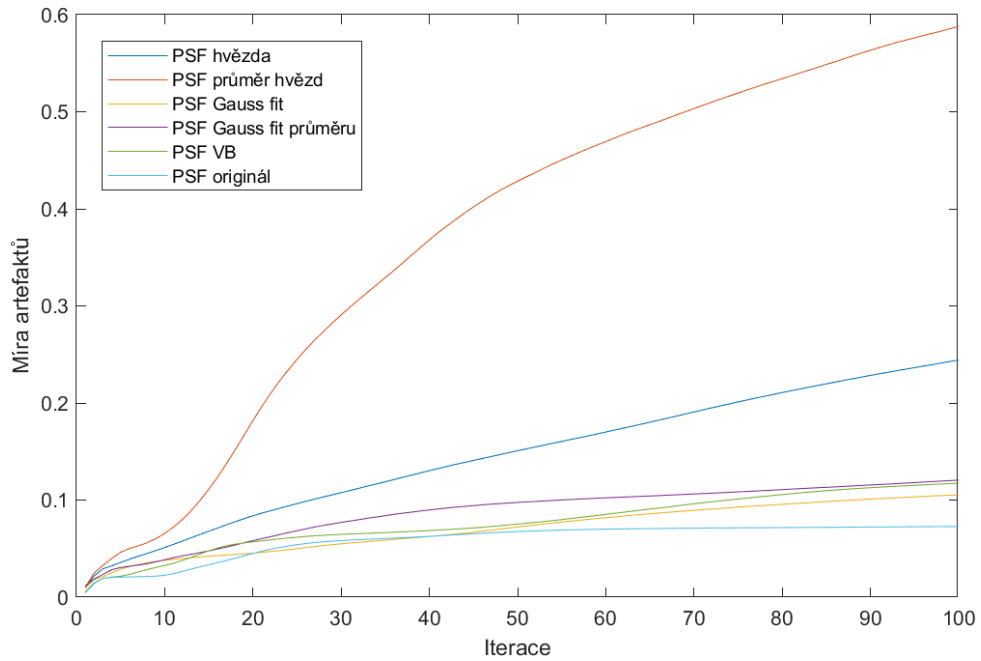


Obrázek 4.33: Srovnání ve výřezu zrekonstruovaného snímku RL algoritmem s TM regularizací, 100 iterací,  $\lambda_{TM} = 0.1$ , PSF z jedné hvězdy (a), z průměru hvězd (b), Gaussovský fit jedné hvězdy (c), Gaussovský fit průměru hvězd (d), odhad z VB (e), originální PSF (f)



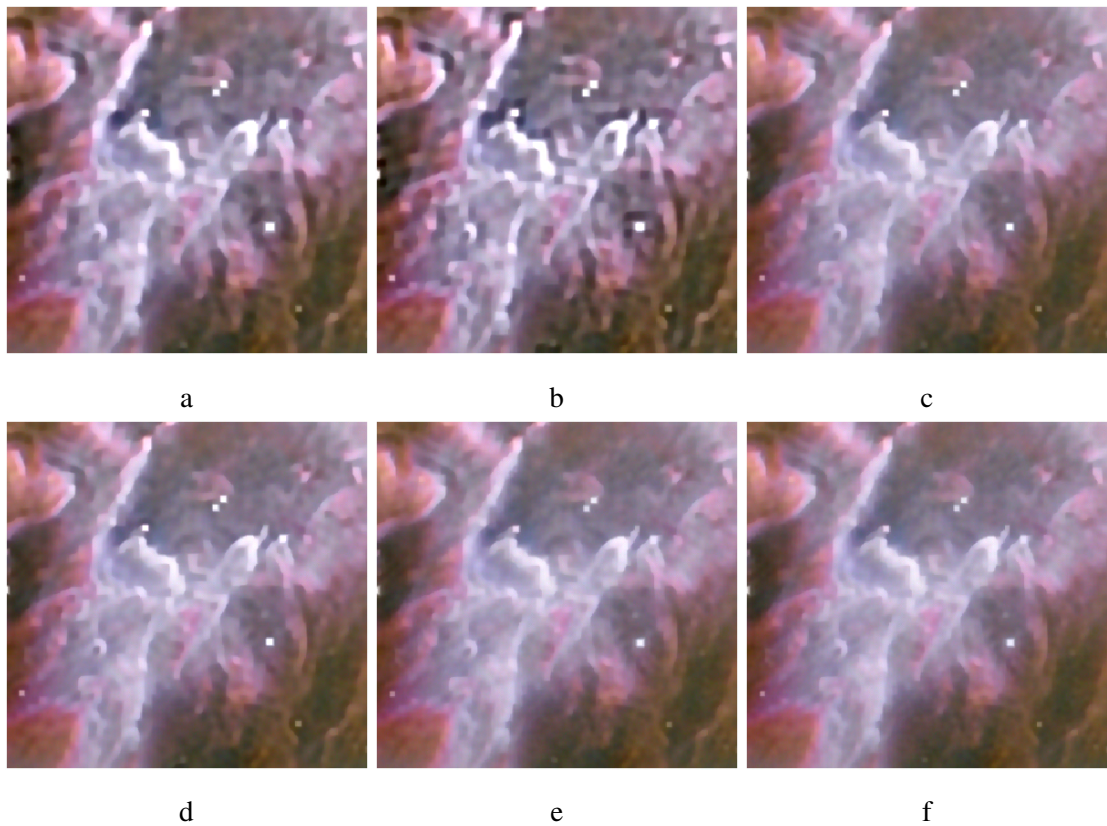
Obrázek 4.34: Vývoj ostrosti v průběhu dekonvoluce neregularizovaným RL algoritmem, 100 iterací, PSF z VB (4.33e)

Nyní stejný test zopakujeme s TV regularizací.

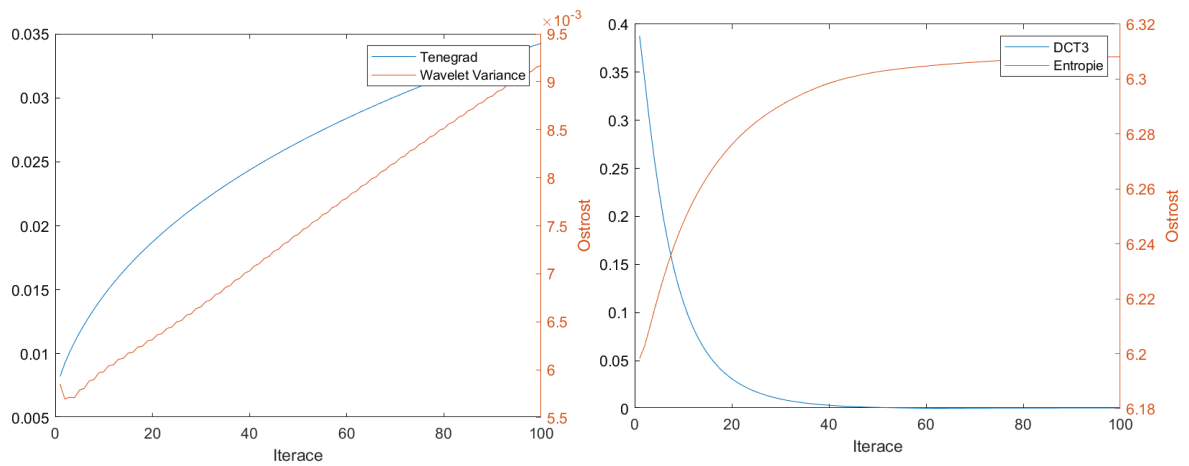


Obrázek 4.35: Vývoj výskytu artefaktů v průběhu dekonvoluce Richardson-Lucyho algoritmem s TV regularizací, 100 iterací,  $\lambda_{TV} = 0.08$

Výsledky jsou znovu podobné, tentokrát horší než pro případ s Tikhonov-Millerovou regularizací.

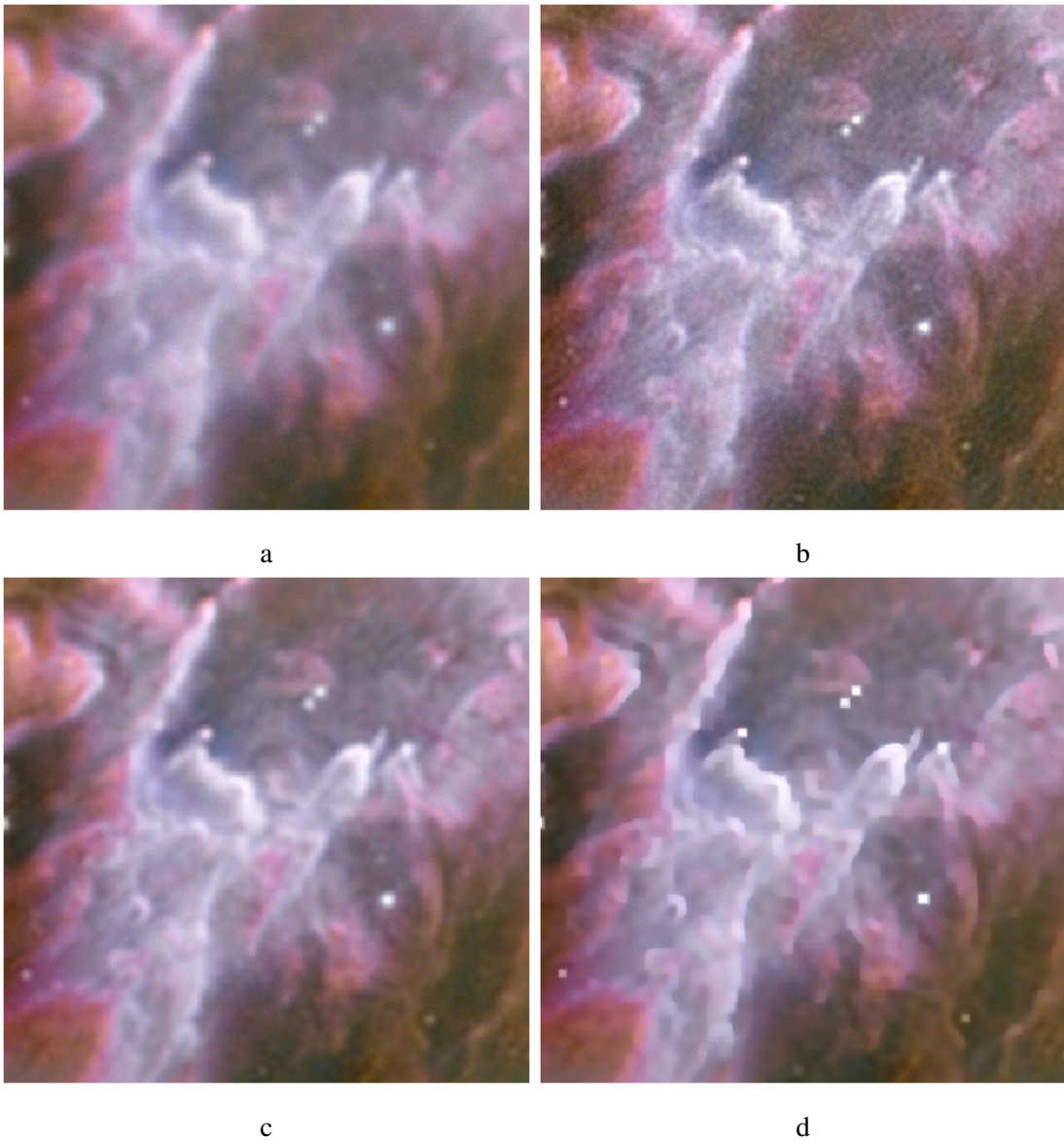


Obrázek 4.36: Srovnání ve výřezu zrekonstruovaného snímku RL algoritmem s TV regularizací, 100 iterací,  $\lambda_{TV} = 0.08$ , PSF z jedné hvězdy (a), z průměru hvězd (b), Gaussovský fit jedné hvězdy (c), Gaussovský fit průměru hvězd (d), odhad z VB (e), originální PSF (f)



Obrázek 4.37: Vývoj ostrosti v průběhu dekonvoluce neregularizovaným RL algoritmem, 100 iterací, PSF z Gaussovského fitu (4.36c)





Obrázek 4.38: Srovnání nejlepších výsledků pro jednotlivé algoritmy s původně rozmazaným snímkem (a). Richardson-Lucyho algoritmus bez regularizace (b), s TM regularizací (c), s TV regularizací (d)

Zajímavostí zůstává, že TV regularizace vynucuje u hvězd čtvercový tvar.

V této kapitole jsme otestovali všechny diskutované metody z předchozích částí. Z výsledků můžeme usuzovat, že všechny verze Richardson-Lucyho algoritmu podávají dobré výsledky, nejlépe zde vychází verze s Tikhonov-Millerovou regularizací. Poněkud překvapující je, že objektivní metriky jako PSNR nebo SSIM nebyly účinné při posuzování výsledků dekonvoluce. Dalším nečekaným zjištěním je, že originální PSF u M104 neposkytovala nejlepší výsledek. Jak jsme zmínili, je to dáno faktem, že velké rozmazání je velice destruktivní a při rekonstrukci s originální PSF vznikají artefakty, jež jsou horší než původní rozmazání. V kapitole 5 tedy musíme myslet na fakt, že pokud bude rozmazání příliš velké, nemusí být rekonstrukce účinná. V každém případě se naplno projevilo, jak důležitý je odhad impulzní odezvy pro úspěšnou rekonstrukci.

U obou uměle rozmazaných snímků vycházel nejlépe odhad PSF pomocí fitu normálního rozdělení (až na 2 případy kdy odhad z VB vycházel marginálně lépe). To není překvapující, rozmazali jsme snímky s bodovými zdroji symetrickou Gaussovskou PSF. U reálných dat nemusejí být hvězdy takto symetrické, bude tedy zajímavé sledovat v kapitole 5, zdali budou odhady pomocí fitování podávat stejně dobré výsledky.

Nakonec jsme se přesvědčili, že náš přístup ke kvatifikování artefaktů ve snímku (definice 3.12) představuje užitečný nástroj pro posouzení kvality odhadu impulzní odezvy a také pro tvorbu zastavovacího kritéria dekonvoluce v případech, kdy nemáme k dispozici kvalitní odhad PSF. Míry ostrosti diskutované v kapitole 3 nemají příliš zásadní význam samostatně, ovšem poskytují zajímavý náhled na průběh dekonvoluce, a především nevyžadují ke svému fungování referenční snímek.

## Kapitola 5

# Experimentální část

Primárním účelem této práce je vyzkoušet možnosti dekonvoluce na astronomických snímcích s cílem zvýšit jejich kvalitu tak, aby odpovídala snímkům pořízeným větší observatoří. Abychom mohli otestovat diskutované a implementované metody, nasnímali jsme 8 astronomických snímků, primárně z Messierova katalogu, vyhodnocovat budeme 3 nejzajímavější z nich, 2 mlhoviny a 1 galaxii. Měření nejsou konzistentní, pokud jde o expoziční čas a další parametry, jelikož samotné snímání bylo závislé na aktuálních meteorologických podmínkách, světelném znečištění a velkou roli hrála fáze měsíčního cyklu. Objekty hlubokého vesmíru lze efektivně snímat pouze za bezměsíčné noci, daleko od měst a zdrojů umělého osvětlení, za nízké vlhkosti a ideálně v bezvětří. Vhodné podmínky nastávají pouze párkrát do roka, a tak nebylo možné každý objekt nasnímat se stejným expozičním časem. Seznam vybraných objektů spolu s použitým expozičním časem je shrnut v následující tabulce.

Objekt	Expoziční čas (s)	Počet expozic	ISO
M42	60	41	6400
M27	32	53	6400
M51	32	151	800

Povšimněme si, že expoziční čas, citlivost čipu i počet expozic jsou u každého snímaného objektu odlišné. Důvodem je jednak charakter snímaných objektů, kdy jasnější objekty můžeme snímat za použití nižší citlivosti čipu a tím omezit šum, ale také již zmiňované povětrnostní podmínky.

### 5.1 Měřicí vybavení

K pořízení všech snímků byl využit dalekohled Newtonova typu s průměrem zrcadla 130 mm posazený na paralaktické montáži s pohonem polární osy pro kompenzaci rotace Země. Celá sestava byla napájena 12V autobaterií. Použitý fotoaparát byl Canon EOS 1100D spolu s dálkovou spouští nastavenou na kontinuální snímání. Snímání probíhalo tak dlouho, jak to počasí umožnilo. Sestava použitá ke snímání je na obrázcích 5.1.

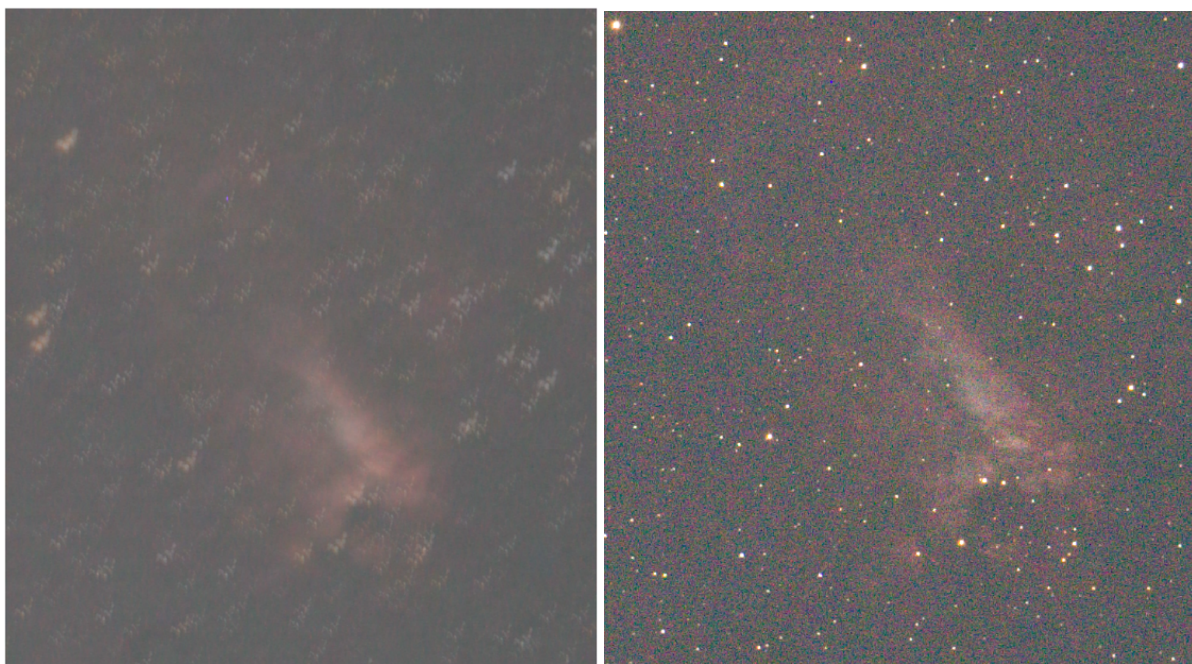


Obrázek 5.1: Dalekohled použitý pro nasnímání astronomických snímků v kapitole 5

Před každým snímáním byla polární osa paralaktické montáže zkalibrována tak, aby odpovídala ose rotace Země a také zrcadla dalekohledu byla seřizena laserovým kolimátorem. Dále byl dalekohled vždy ponechán hodinu při venkovní teplotě kvůli teplotní roztažnosti zrcadla a pro omezení turbulencí teplého vzduchu uvnitř tubusu. Toto temperování mělo největší význam u objektu M42, při jeho snímání klesala teplota hlubko pod bod mrazu.

## 5.2 Předzpracování snímků

Ačkoliv paralaktická montáž zajišťuje kompenzaci zemské rotace, během delších expozičních se začnou projevovat mírné nepřesnosti v kalibraci polární osy, případně nepřesnosti v mechanické soustavě montáže dalekohledu. Zároveň jsou naše snímky výrazně zašuměné, jelikož snímáme temné objekty s vysokou nastavenou citlivostí čipu a dlouhou expoziční.



Obrázek 5.2: Ukázka rozmazání v důsledku pohybu dalekohledu během snímání (vlevo), ukázka míry zašumění snímku (vpravo)

Oba tyto problémy mají snadné řešení, rozdělíme expoziční čas na sérii kratších expozic, typicky 30-80 sekund, za takto krátký čas se nepřesnosti v kalibraci či mechanickém zpracování montáže nestihnou projevit. Zároveň tímto postupem můžeme značně omezit vliv šumu, protože jednotlivé snímky zprůměrujeme. To může být značně problematické, jelikož je nejprve potřeba snímky zaregistrovat. Máme spoustu hvězd, slabou mlhovinu a na slabém pozadí, to vše zatížené silným šumem. Často se stává, že automatické registrační algoritmy si s tímto problémem nedokáží poradit a je nutné ručně zadat polohy několika hvězd a na základě tohoto výběru provádět registraci. Dále je potřeba odečíst tzv. dark frame. Krátce po snímání pořídíme sérii snímků se stejným nastavením fotoaparátu a při stejné teplotě, ovšem se zakrytým vstupem dalekohledu. Získáme tak zachycený šum fotoaparátu za daných podmínek, také tím zachytíme případné vadné pixely. Tento dark frame následně odečteme od našeho snímku. Také mírně upravíme kontrast, jas a sytost dle potřeby. Po registraci, průměrování a odečtení dark frame získáme snímek, jako je na obrázku 5.3 níže.

**Poznámka:** Často se také provádí tzv. flat field korekce, kdy se pořídí snímek oblohy za dne s vhodně nastavenou expozicí. Jas v okrajích snímku klesá, pomocí flat field můžeme tento pokles jasu modelovat a kompenzovat. V našem případě to ovšem není potřeba, používáme dalekohled s ohniskovou vzdáleností 650 mm, snímání objekty jsou tedy poměrně malé vzhledem k zornému poli a budeme je zkoumat ve výřezu, z prostředka snímku, kde se pokles jasu neprojevuje.



Obrázek 5.3: Mlhovina M17 po registraci, průměrování a odečtení dark frame

### 5.3 Dekonvoluce pořízených snímků

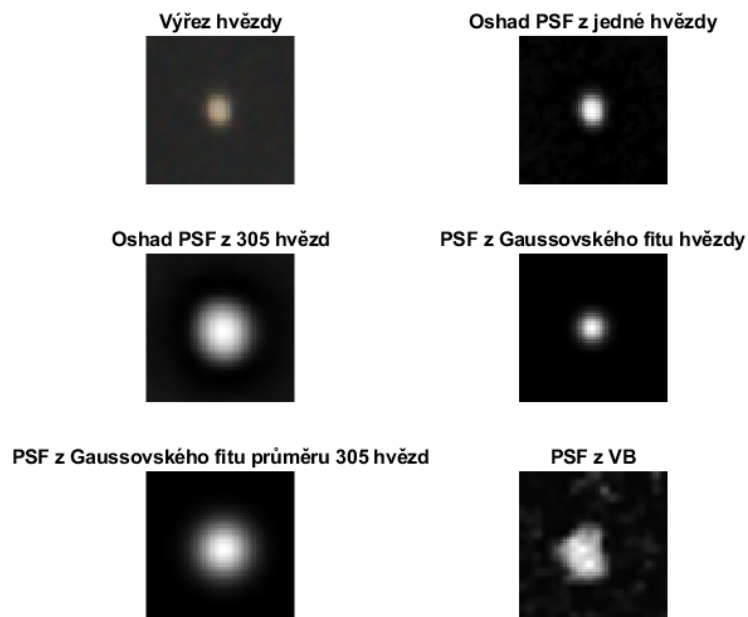
Nyní máme připravené zpracované snímky a metody pro odhad PSF z tvaru hvězd. Můžeme tedy provést samotnou dekonvoluci. První v seznamu námi pořízených snímků je mlhovina M42.



Obrázek 5.4: Výchozí snímek mlhoviny M42

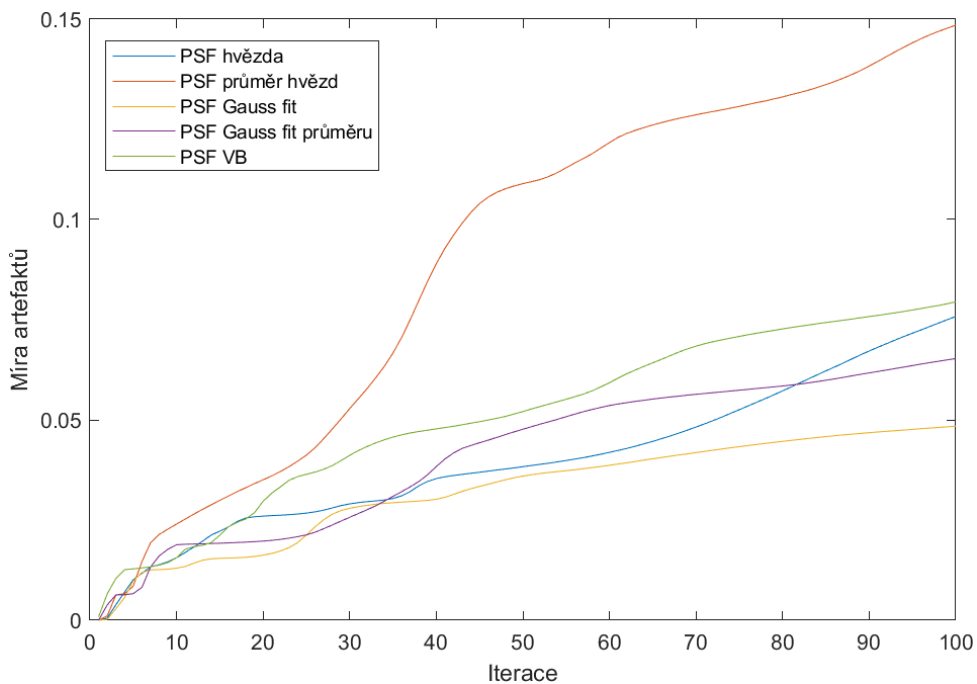
Už při prvním pohledu na snímek je jasné že zde narazíme na problém. Velká část hvězd ve snímku je přepálená nebo součástí samotné mlhoviny. Bude tedy složité získat kvalitní PSF. Impulzní odezvy získané metodami popsanými v 4.1, pro obrázek 5.4 jsou níže na obrázku 5.5.

**Poznámka:** Rekonstrukce je nejlepší porovnávat na displeji a zvětšené, aby byly rozdíly opravdu patrné.



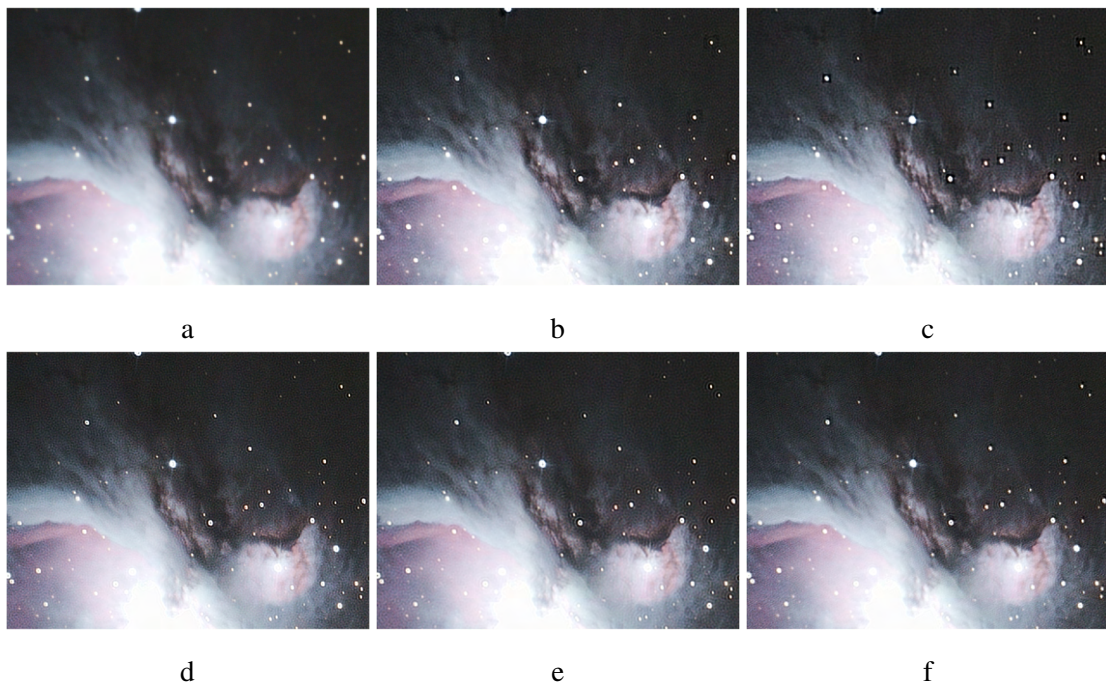
Obrázek 5.5: Odhady PSF metodami v kapitole 5.3 pro snímek mlhoviny M42

Nejprve provedeme dekonvoluci neregularizovaným Richardson-Lucyho algoritmem.

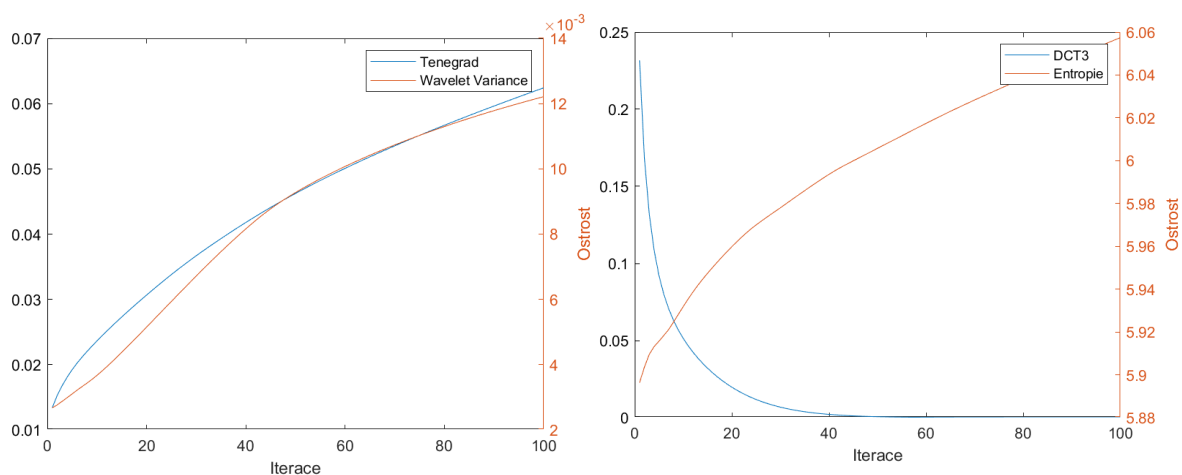


Obrázek 5.6: Vývoj výskytu artefaktů ve snímku mlhoviny M42 při dekonvoluci neregularizovaným Richardson-Lucyho algoritmem, 100 iterací





Obrázek 5.7: Srovnání ve výřezu zrekonstruovaného snímku RL algoritmem bez regularizace, 100 iterací. Výřez originálního snímku (a), PSF z jedné hvězdy (b), z průměru hvězd (c), Gaussovský fit jedné hvězdy (d), Gaussovský fit průměru hvězd (e), odhad z VB (f)



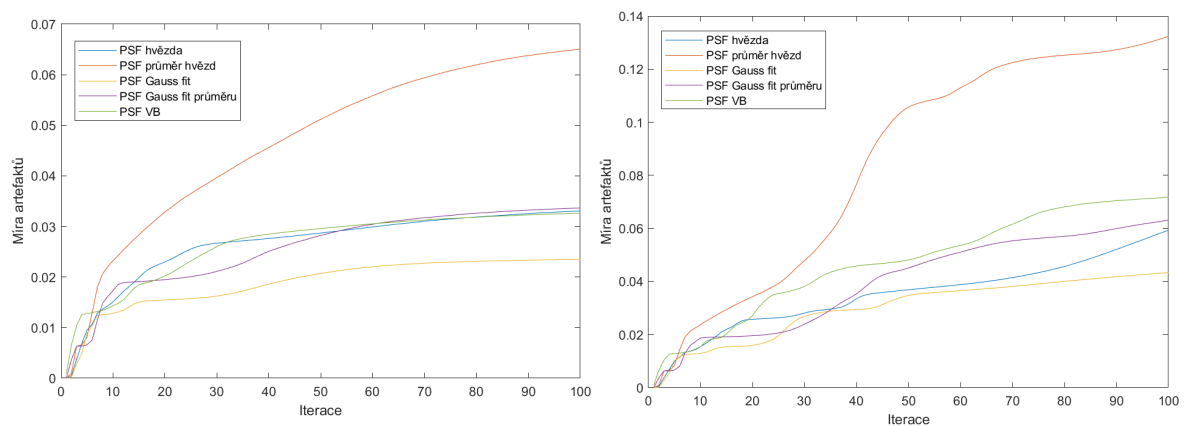
Obrázek 5.8: Vývoj ostrosti v průběhu dekonvoluce snímku mlhoviny M42 neregularizovaným Richardson-Lucyho algoritmem, 100 iterací

Stejně jako v případě synteticky rozmazávaných snímků nám nejlépe vychází PSF získaná z fitu normálního rozdělení, a to jak z grafu 5.6, tak i z vizuálního porovnání v obrázku 5.7. Vývoj ostrosti pro tuto rekonstrukci je na obrázku 5.8. Výsledná finální rekonstrukce je níže na obrázku 5.9.



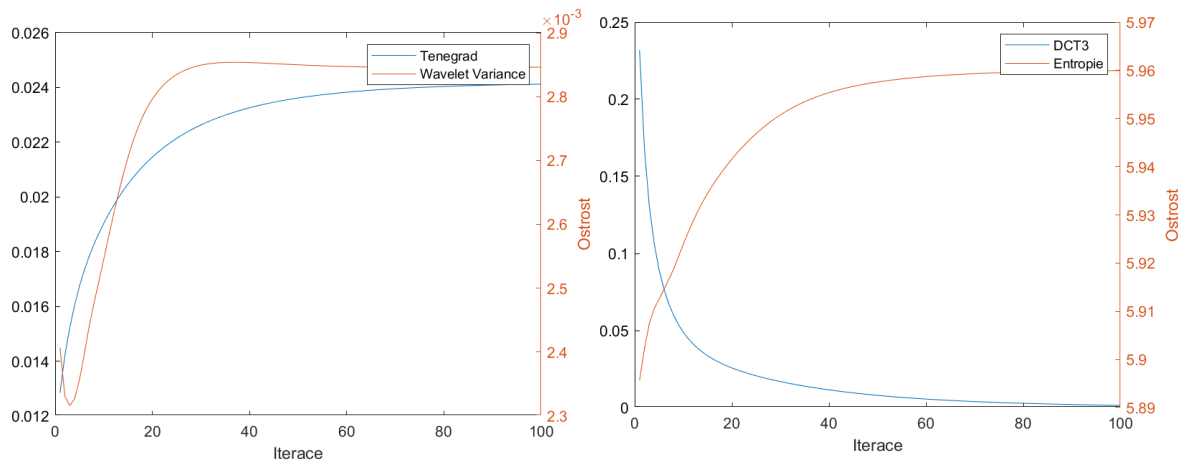
Obrázek 5.9: Výsledná rekonstrukce snímku mlhoviny M42 neregularizovaným Richardson-Lucyho algoritmem

Dále vyzkoušíme totéž s TM regularizací a s TV regularizací. Stejně jako ve 4. kapitole zde již nebudeme dopodrobna rozebírat každý krok, zaměříme se rovnou na výsledky.

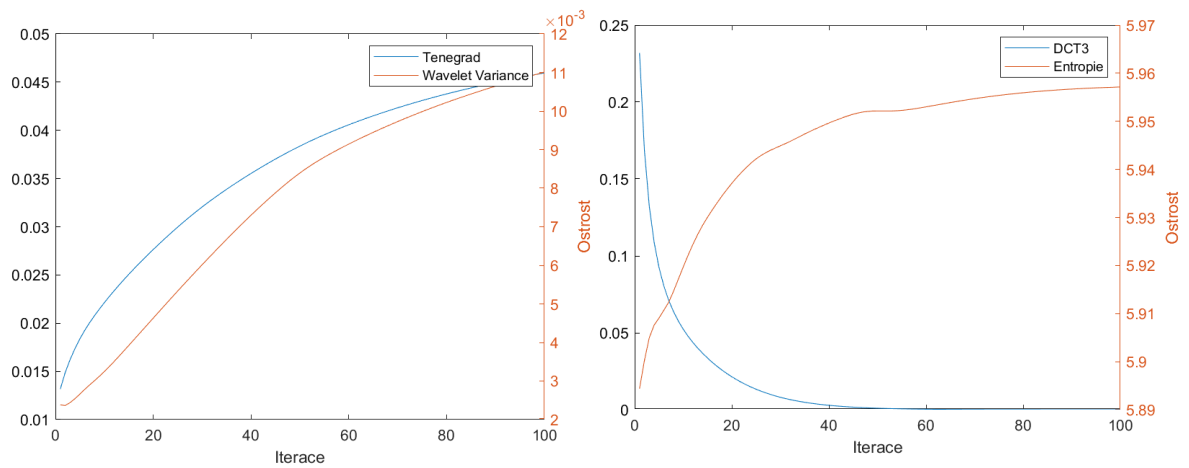


Obrázek 5.10: Vývoj výskytu artefaktů v průběhu dekonvoluce snímku mlhoviny M42 Richardson-Lucyho algoritmem s TM regularizací (vlevo) a TV regularizací (vpravo), 100 iterací,  $\lambda_{TM} = 0.1$ ,  $\lambda_{TV} = 0.08$

Ve všech případech vychází nejlépe impulzní odezva z normálního rozdělení. Tomu odpovídá i vizuální srovnání. Podívejme se na míry ostroty.



Obrázek 5.11: Vývoj ostrosti v průběhu dekonvoluce snímku mlhoviny M42 Richardson-Lucyho algoritmem s TM regularizací, 100 iterací,  $\lambda_{TM} = 0.1$

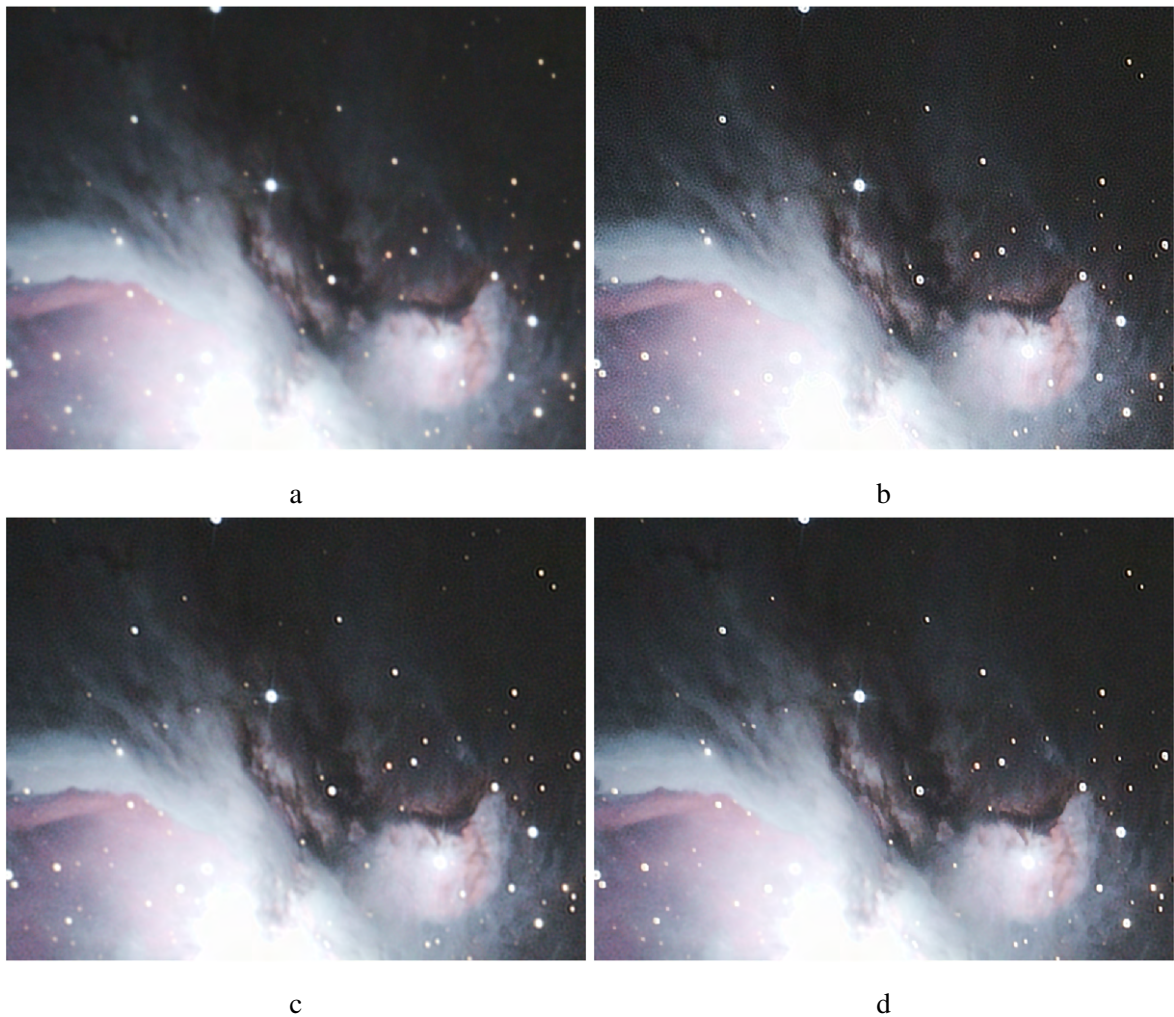


Obrázek 5.12: Vývoj ostrosti v průběhu dekonvoluce snímku mlhoviny M42 Richardson-Lucyho algoritmem s TV regularizací, 100 iterací,  $\lambda_{TV} = 0.08$



Obrázek 5.13: Finální rekonstrukce snímku mhloviny M42 Richardson-Lucyho algoritmem s TM regularizací a PSF z normálního rozdělení, 100 iterací  $\lambda_{TM} = 0.1$

Nejlépe nám vychází rekonstrukce s TM regularizací a PSF z gaussovského fitu. Srovnání metod ve výřezu je níže na obrázku 5.14.



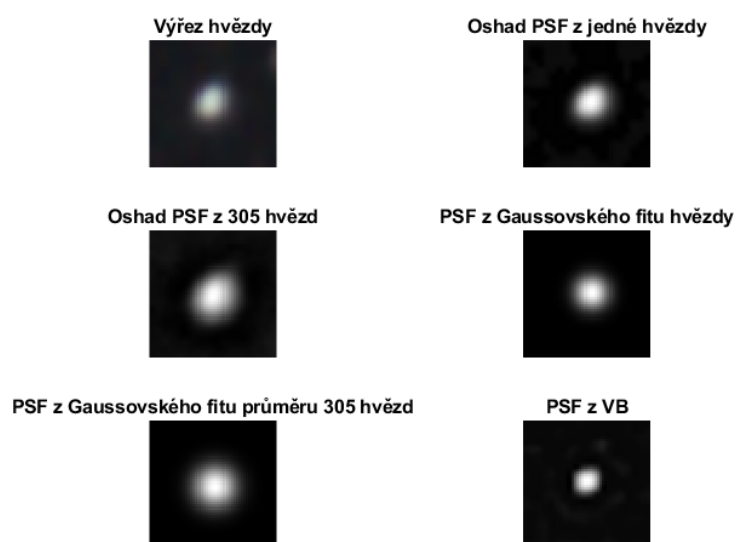
Obrázek 5.14: Srovnání ve výřezu původního snímku mlhoviny M42 (a) s dekonvolucí Richardson-Lucyho algoritmem bez regularizace (b), s TM regularizací (c) a TV regularizací (d), 100 iterací,  $\lambda_{TM} = 0.1$ ,  $\lambda_{TV} = 0.08$

Jak vidíme, regularizace výrazně potlačuje šum a artefakty i na reálných datech. Výsledné rekonstrukce lépe zachycují jemné struktury mlhoviny, než jak jsou zobrazeny v původním snímku. Výsledky s TM regularizací a TV regularizací jsou si velmi podobné. Vizuálně to vypadá, že TV regularizace poskytuje vyšší ostrost, ovšem je náchylnější na ringing.

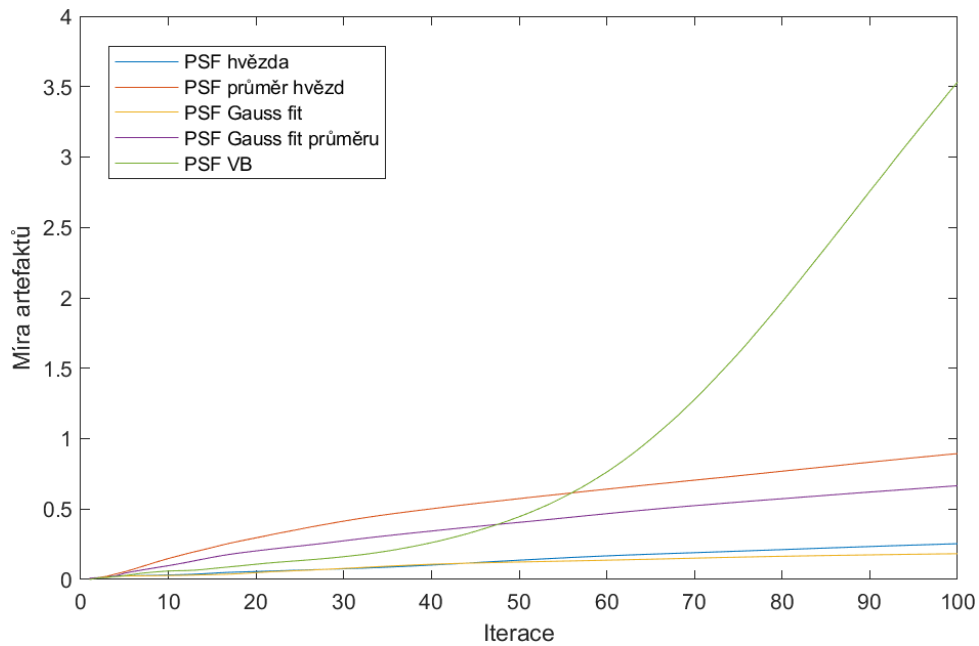
Dalším snímkem na seznamu je mlhovina M27.



Obrázek 5.15: Výchozí snímek mlhoviny M27

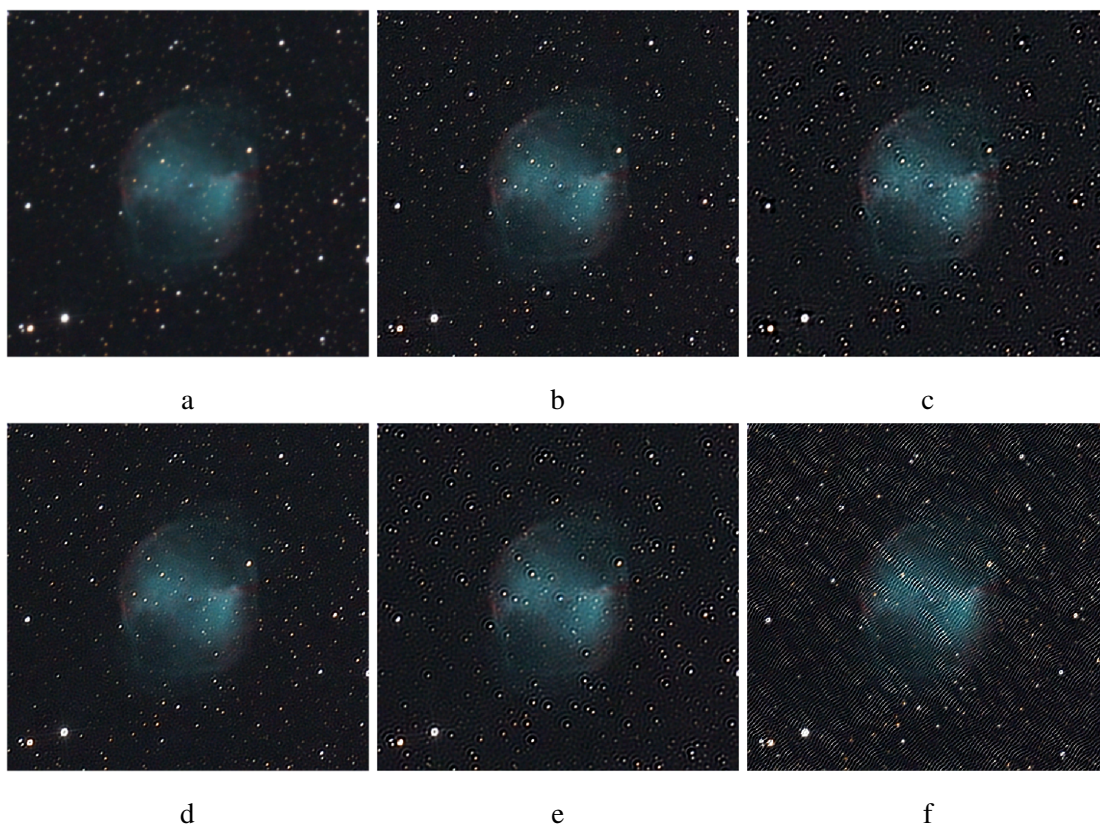


Obrázek 5.16: Odhady PSF pro dekonvoluci snímku mlhoviny M27

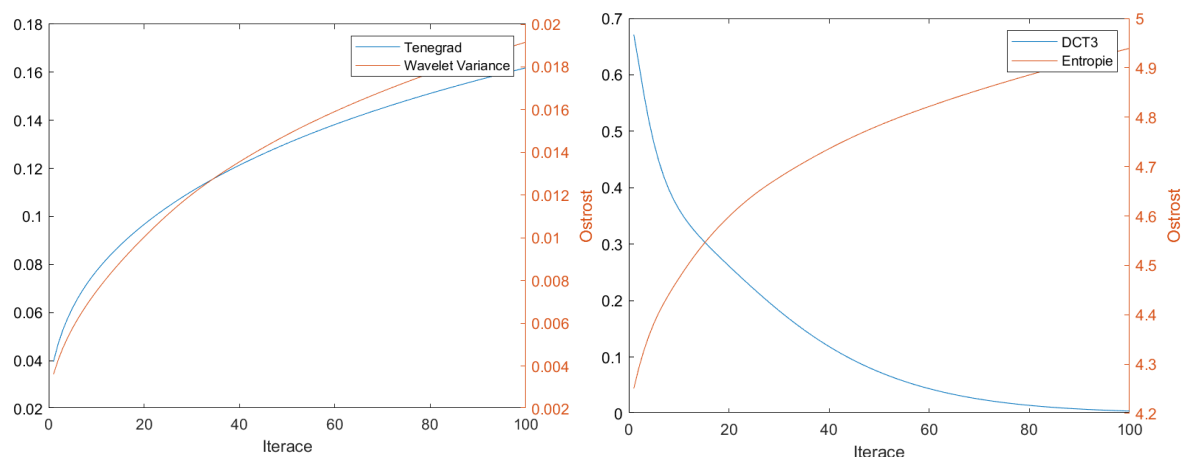


Obrázek 5.17: Vývoj výskytu artefaktů při dekonvoluci snímku mlhoviny M27 neregularizovaným Richardson-Lucyho algoritmem

Opět nám nejlépe vychází PSF získaná z fitu normálního rozdělení. Oproti předchozímu snímku nejhůře vychází PSF získaná z VB. Toto zjištění je konzistentní s vizuální porovnáním. Samotná kvalita rekonstrukce je již nyní velmi dobrá. Srovnání ve výřezu je na obrázku 5.18 níže. Zaměříme se hlavně na obrázky 5.18a a 5.18d, tam je kvalita rekonstrukce nejlépe patrná. Ukazuje se, že diskutované metody mohou poskytnout výrazné zlepšení kvality snímku. Na obrázku 5.19 máme k dispozici vývoj ostroty v průběhu dekonvoluce.



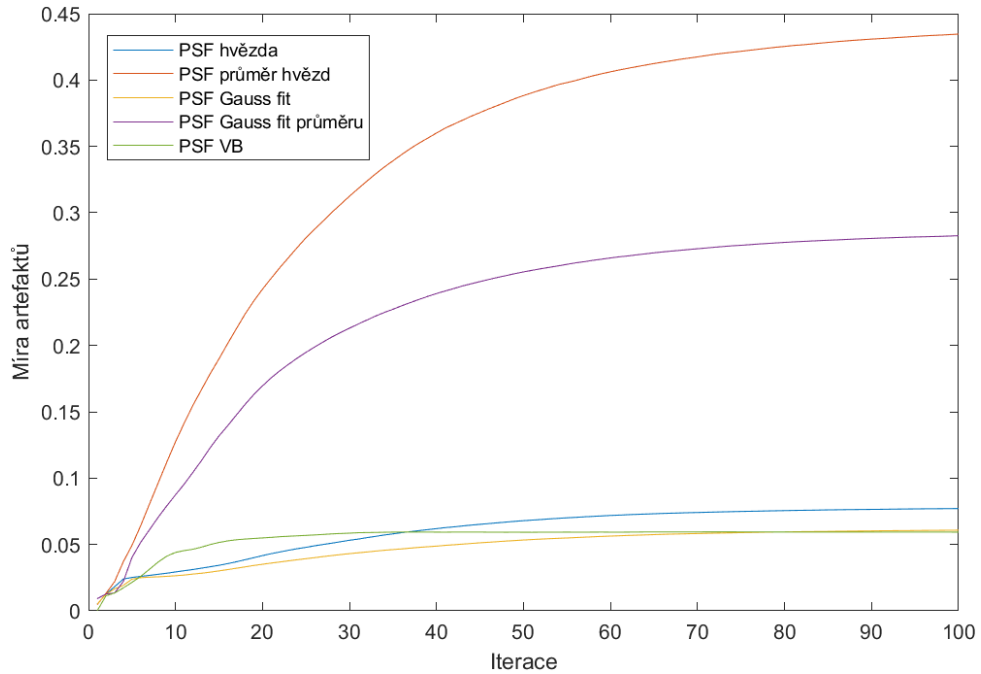
Obrázek 5.18: Srovnání ve výřezu zrekonstruovaného snímku RL algoritmem bez regularizace, 100 iterací. Výřez originálního snímku (a), PSF z jedné hvězdy (b), z průměru hvězd (c), Gaussovský fit jedné hvězdy (d), Gaussovský fit průměru hvězd (e), odhad z VB (f)



Obrázek 5.19: Vývoj ostrosti v průběhu dekonvoluce snímku mlhoviny M27 neregularizovaným Richardson-Lucyho algoritmem s PSF získanou z normálního rozdělení

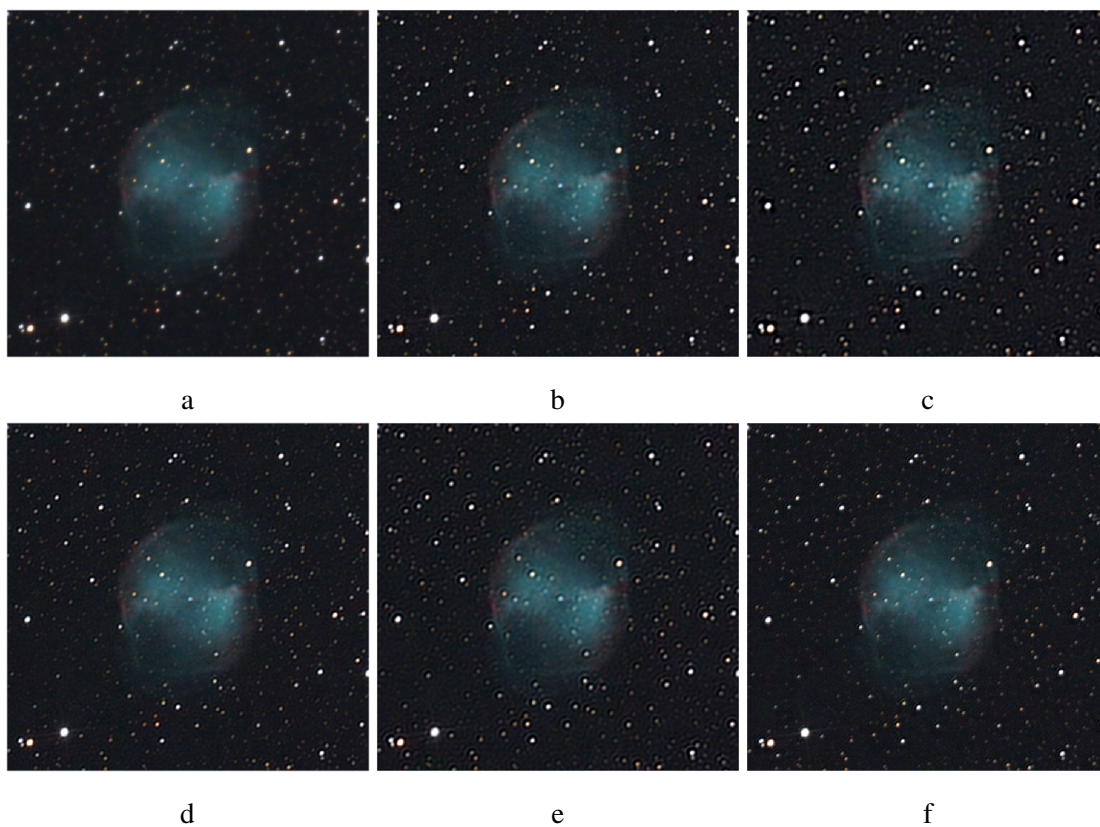


U tohoto snímku si rozebereme i výsledky s regularizovanými algoritmy. Projevuje se zde totiž naplno účinek regularizace. Nejdříve varianta s TM regularizací:



Obrázek 5.20: Vývoj výskytu artefaktů při dekonvoluci Richardson-Lucyho algoritmem s TM regularizací, 100 iterací,  $\lambda_{TM} = 0.1$

Vidíme, že najednou rekonstrukce s PSF z variační Bayesovské metody poskytuje stejně dobrý výsledek jako dosud nejlepší impulzní odezva z fitu normálního rozdělení. A skutečně, když se podíváme na vizuální srovnání, výsledky jsou srovnatelné, přičemž v případě bez regularizace byla rekonstrukce s PSF z VB naprosto nepoužitelná. Díky regularizaci dojde k naprostému potlačení ringingu.

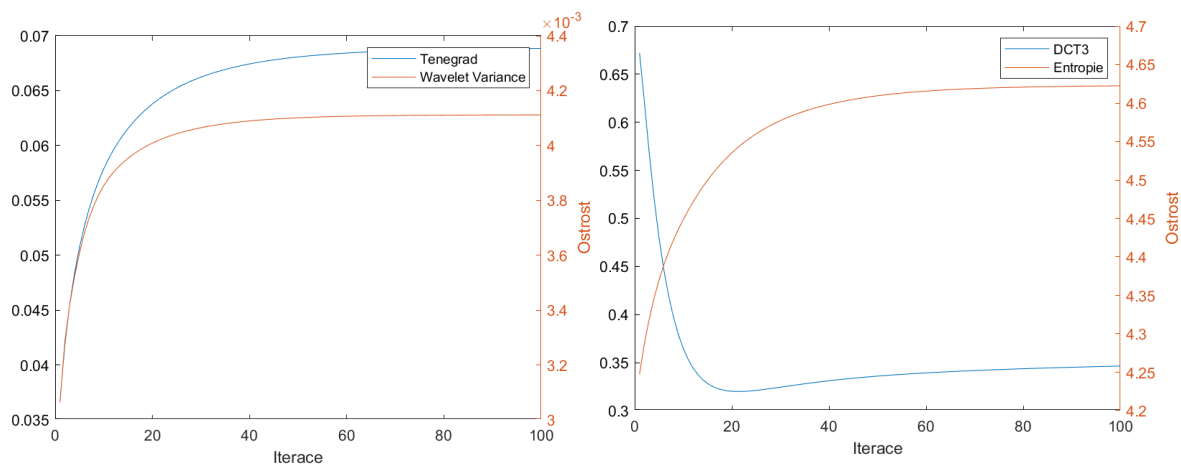


Obrázek 5.21: Srovnání ve výřezu zrekonstruovaného snímku RL algoritmem s TV regularizací, 100 iterací. Výřez originálního snímku (a), PSF z jedné hvězdy (b), z průměru hvězd (c), Gaussovský fit jedné hvězdy (d), Gaussovský fit průměru hvězd (e), odhad z VB (f)



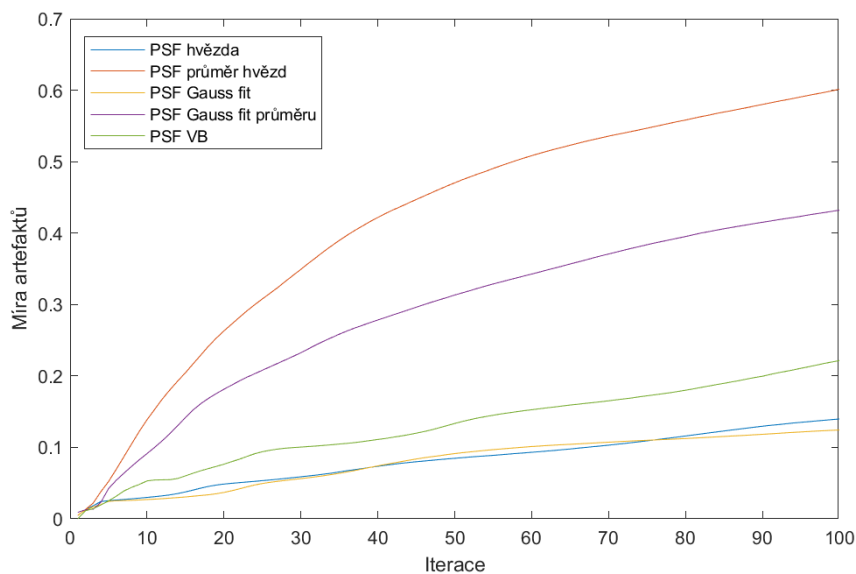
Obrázek 5.22: Srovnání dekonvoluce s impulzní odezvou z VB bez regularizace (vlevo), s TM regularizací (vpravo)

Stále ovšem o něco lépe vychází PSF z fitu normálního rozdělení. Vývoj ostrosti je níže na obrázku 5.23.



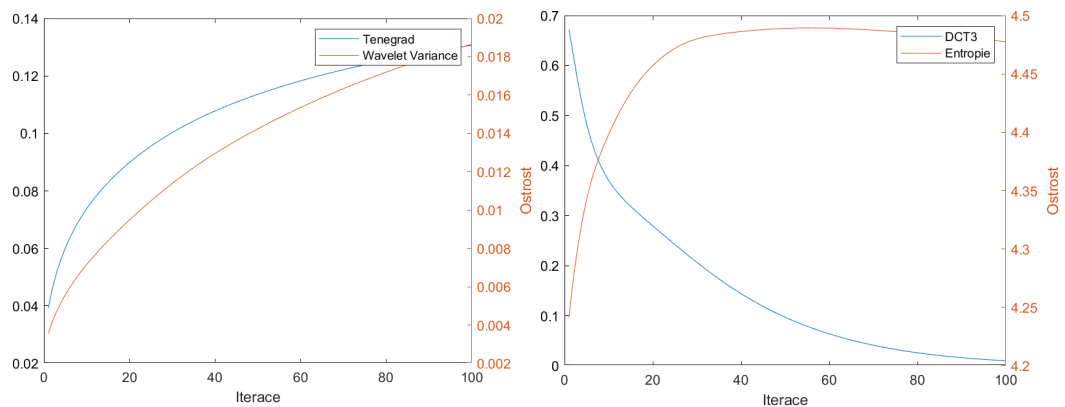
Obrázek 5.23: Vývoj ostrosti v průběhu dekonvoluce snímku mlhoviny M27 Richardson-Lucyho algoritmem s TM regularizací

Stejný postup nyní aplikujeme s TV regularizací.

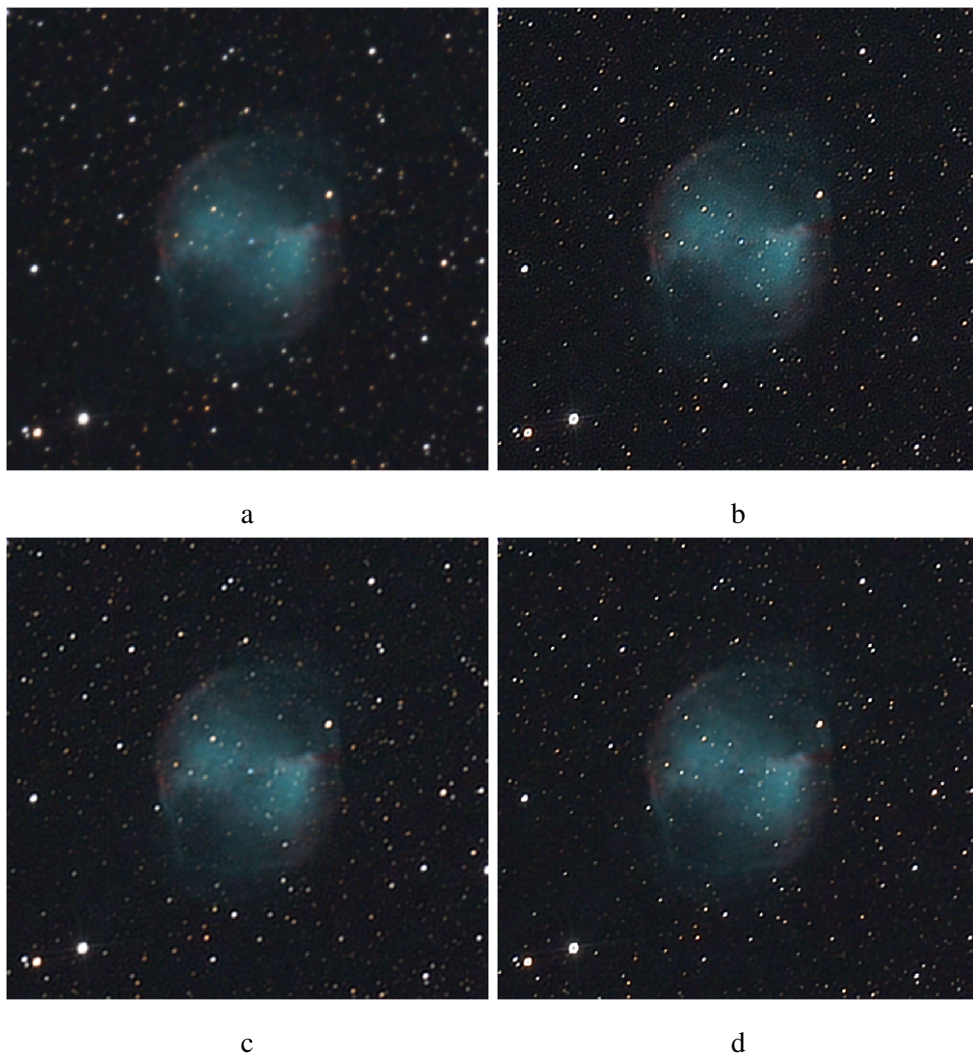


Obrázek 5.24: Vývoj výskytu artefaktů při dekonvoluci snímku mlhoviny M27 Richardson-Lucyho algoritmem v TV regularizací, 100 iterací,  $\lambda_{TV} = 0.08$

Výsledky jsou podobné, opět nám nejlépe vychází PSF z fitování Gaussovského rozdělení, podíváme se tedy rovnou na vývoj ostrosti s touto PSF a na finální srovnání jednotlivých rekonstrukcí.



Obrázek 5.25: Vývoj ostrosti v průběhu dekonvoluce snímku mlhoviny M27 Richardson-Lucyho algoritmem s TV regularizací, 100 iterací,  $\lambda_{TV} = 0.08$

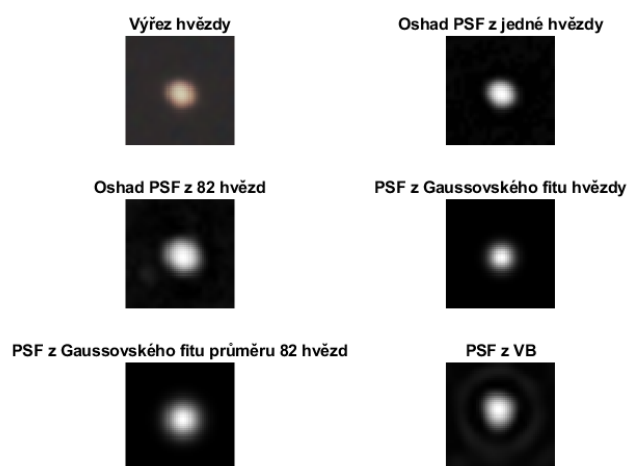


Obrázek 5.26: Srovnání ve výřezu výsledků dekonvoluce snímku mlhoviny M27 (a), RL algoritmem bez regularizace (b), s TM regularizací (c), s TV regularizací (d)

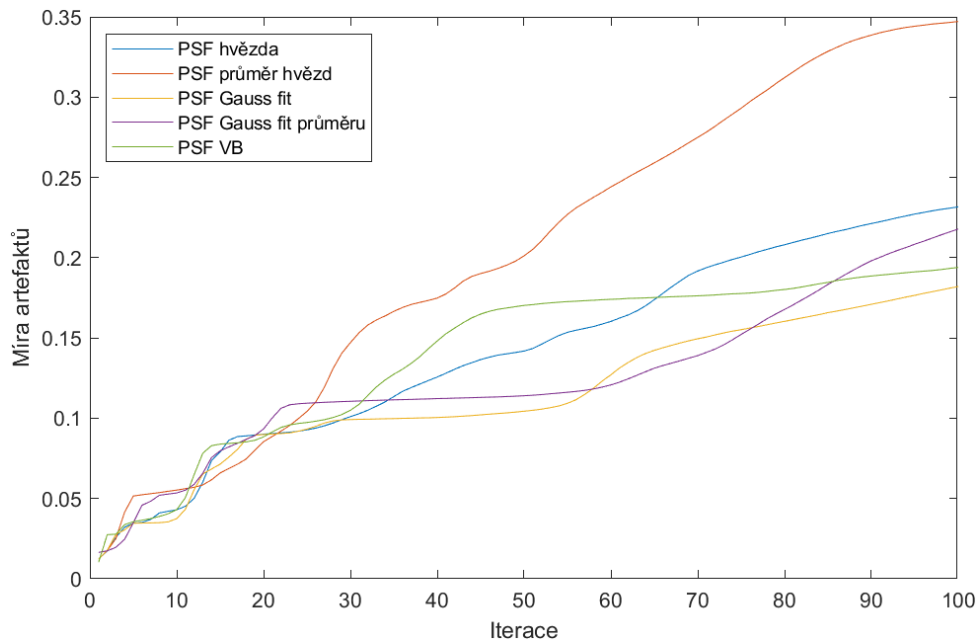
Výsledek 5.26d je dosud nejlepší získanou rekonstrukcí. Další snímek ze seznamu v úvodu kapitoly, který budeme zkoumat, je galaxie M51.



Obrázek 5.27: Výchozí snímek galaxie M51

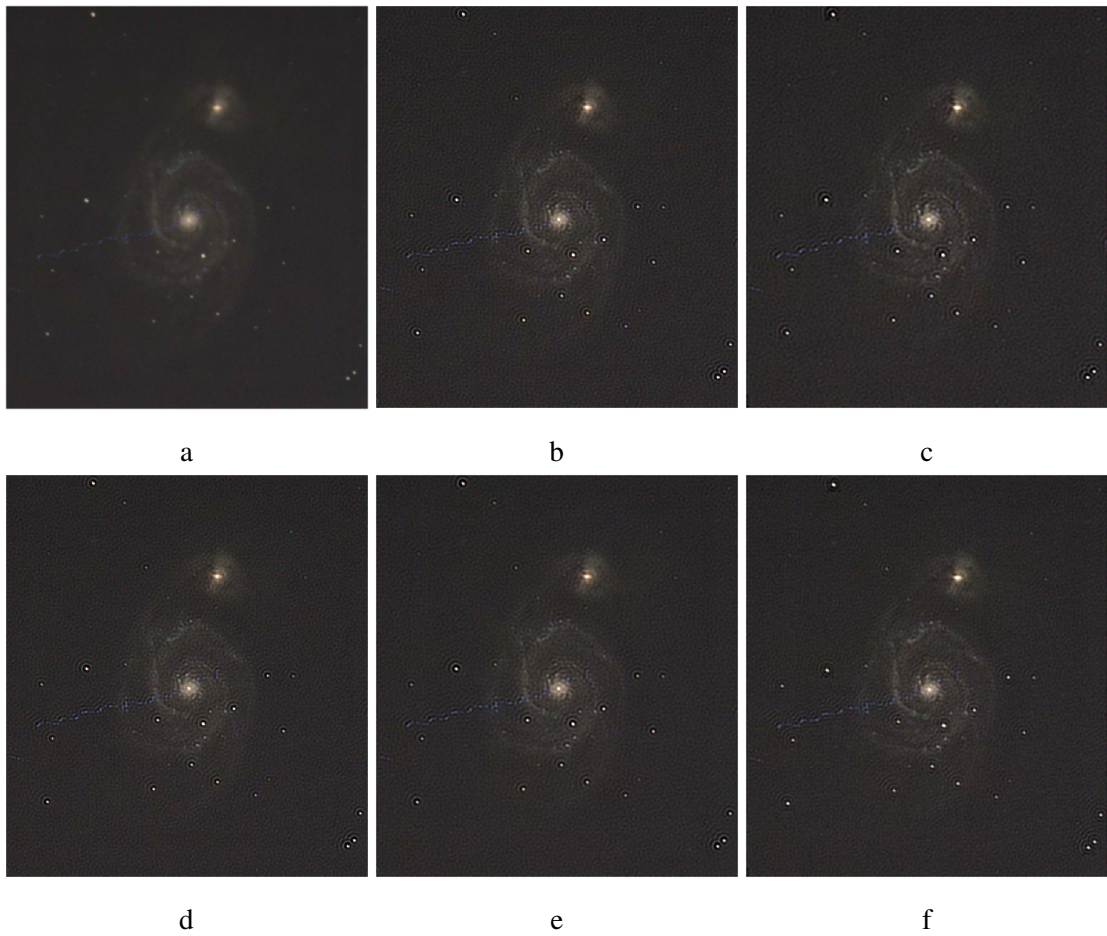


Obrázek 5.28: Odhady PSF pro snímek galaxie M51

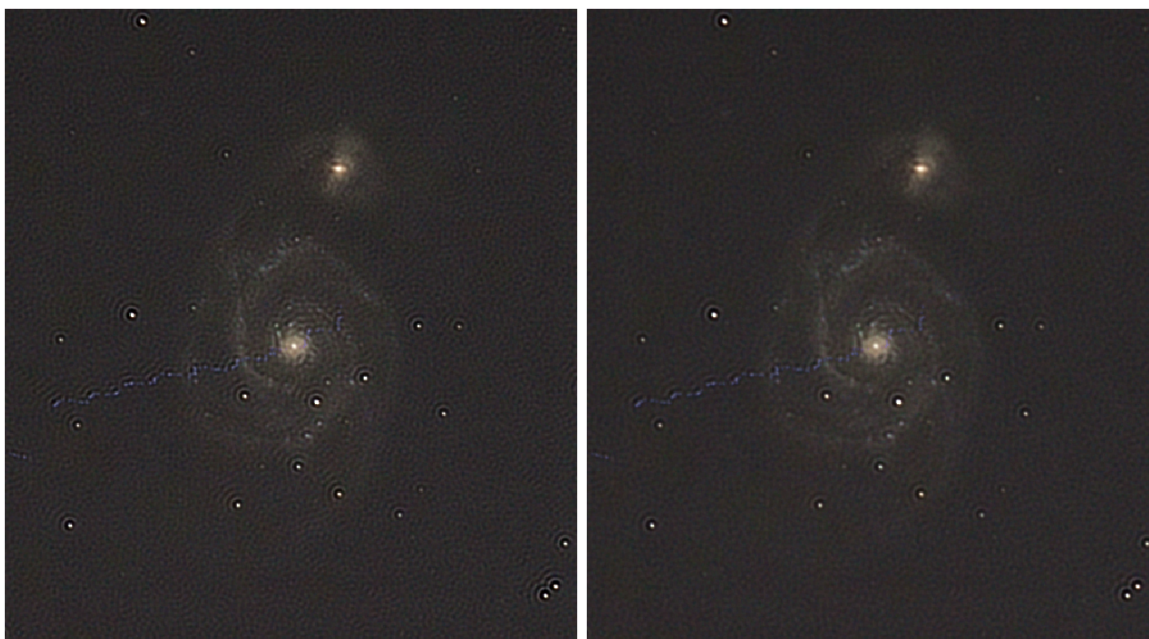


Obrázek 5.29: Vývoj výskytu artefaktů při dekonvoluci snímku galaxie M51 Richardson-Lucyho algoritmem bez regularizace

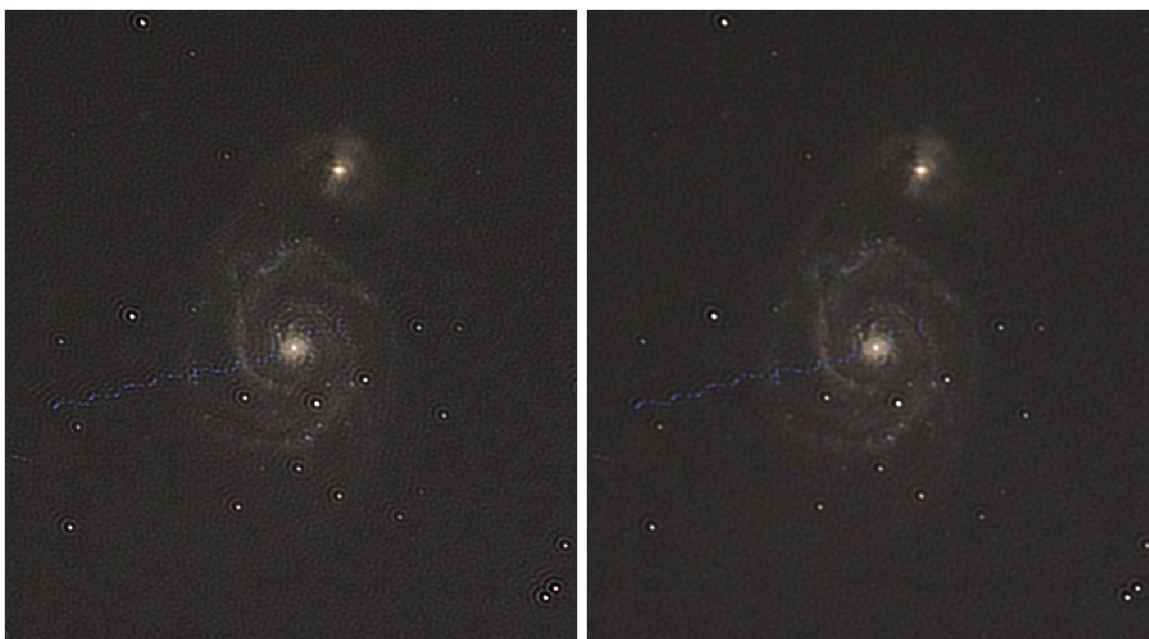
Vidíme, že v tomto případě jsou všechny PSF srovnatelné a způsobují podobné zatížení ringingem, což opět můžeme vizuálně potvrdit na obrázku 5.30 níže. Nemáme tedy vhodnou PSF, která by nezpůsobovala ringing v přijatelné míře. Můžeme tedy využít naši definici 3.12 a nastavit zastavovací kritérium  $\Lambda \leq 0.1$ . Nejlépe vychází opět PSF z Gaussovského fitu, srovnání 100 iterací a 34 iterací z našeho kritéria je v obrázku 5.31. Vidíme, že zatížení ringingem je nižší, přesto výrazně patrné. I tak však rekonstrukce zvýraznila strukturu galaxie. Dále účinnost našeho kritéria demonstrujeme v obrázku 5.32 na rekonstrukci s použitím PSF z jedné hvězdy.



Obrázek 5.30: Srovnání ve výřezu zrekonstruovaného snímku RL algoritmem bez regularizace, 100 itera-  
 rací. Výřez originálního snímku (a), PSF z jedné hvězdy (b), z průměru hvězd (c), Gaussovský fit jedné  
 hvězdy (d), Gaussovský fit průměru hvězd (e), odhad z VB (f)



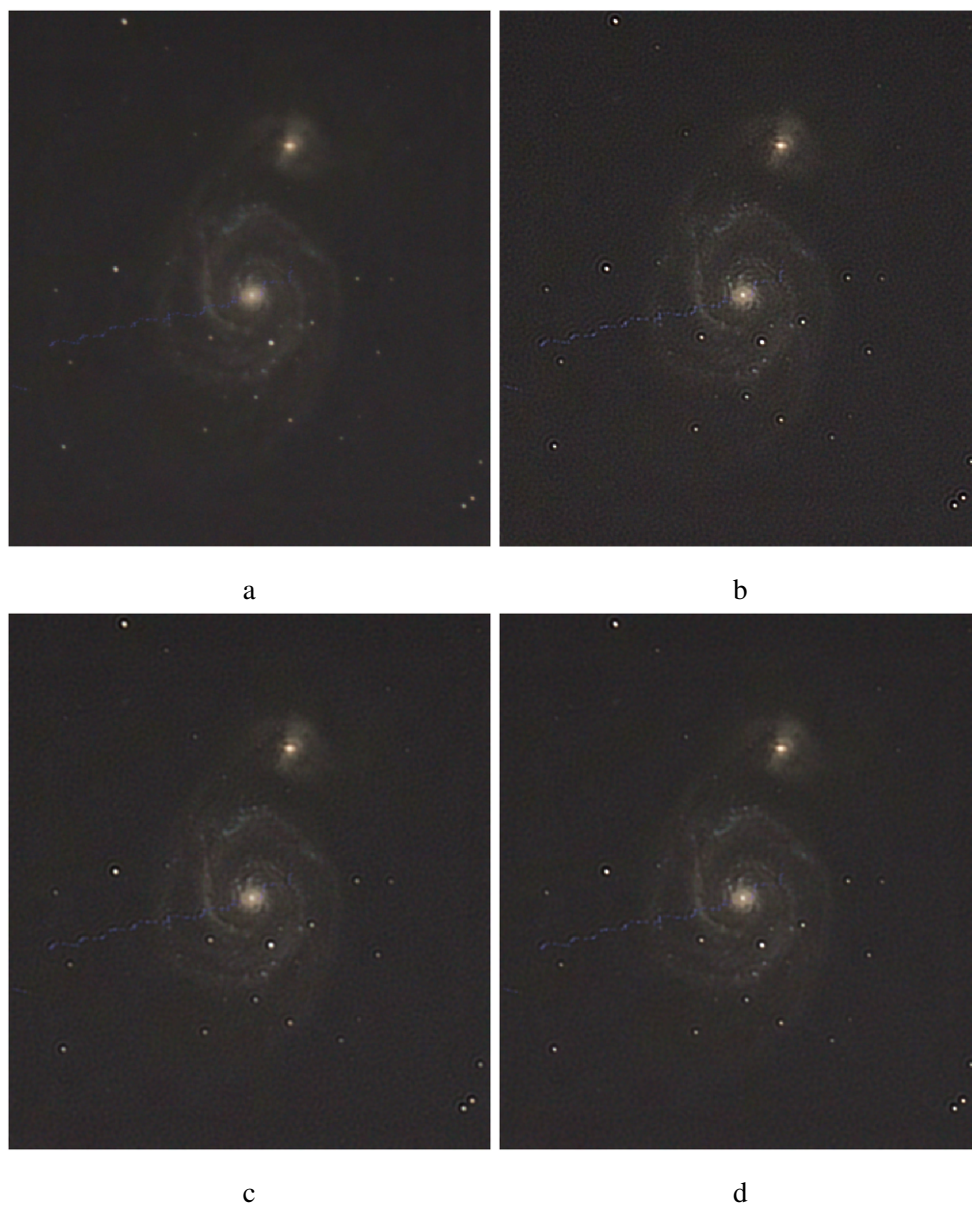
Obrázek 5.31: Srovnání rekonstrukce snímku galaxie M51 bez zastavovacího kritéria (vlevo) a se zastavovacím kritériem  $\Lambda \leq 0.1$  (vpravo), PSF z normálního rozdělení



Obrázek 5.32: Srovnání rekonstrukce snímku galaxie M51 bez zastavovacího kritéria (vlevo) a se zastavovacím kritériem  $\Lambda \leq 0.1$  (vpravo), PSF z jedné hvězdy

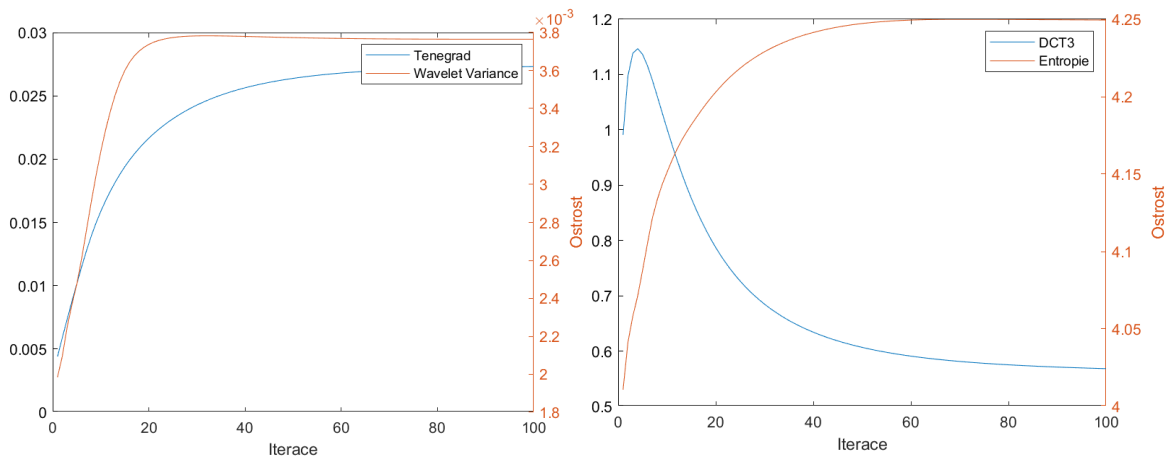
Dále aplikujeme Richardson-Lucyho algoritmus v regularizovaných verzích. Metodologie je stejná jako ve všech předchozích případech, výsledky jsou podobné. Přejdeme tedy rovnou na závěrečné srovnání nejlepších rekonstrukcí.



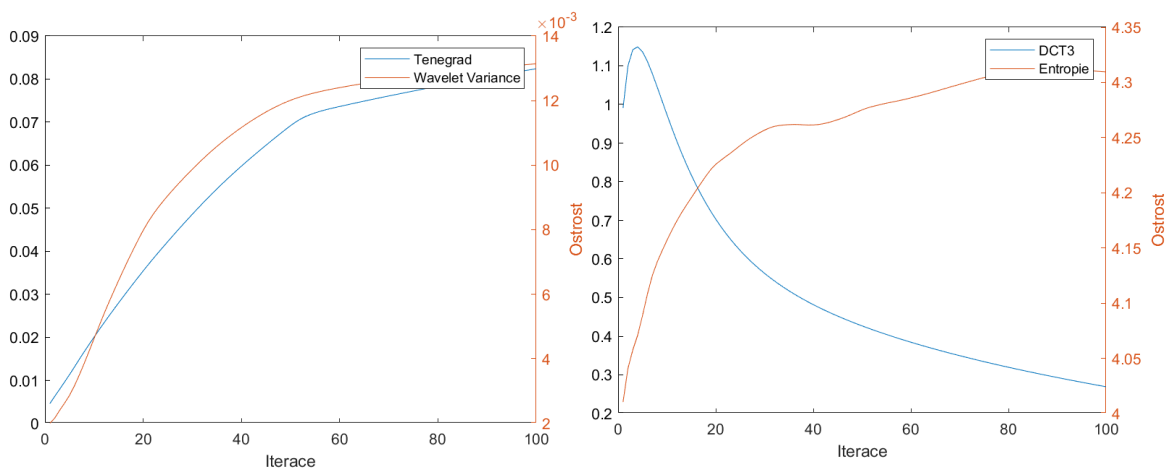


Obrázek 5.33: Srovnání ve výřezu výsledků dekonvoluce snímku galaxie M51 (a), RL algoritmem bez regularizace (b), s TM regularizací (c), s TV regularizací (d),  $\Lambda \leq 0.1$

Nakonec se ještě podíváme na vývoj ostroty v průběhu dekonvolucí.



Obrázek 5.34: Vývoj ostrosti v průběhu dekonvoluce snímku galaxie M51 Richardson-Lucyho algoritmem s TM regularizací, 100 iterací,  $\lambda_{TM} = 0.1$



Obrázek 5.35: Vývoj ostrosti v průběhu dekonvoluce snímku galaxie M51 Richardson-Lucyho algoritmem s TV regularizací, 100 iterací,  $\lambda_{TV} = 0.08$

Z těchto experimentů můžeme vyvodit, že dekonvoluce je účinný nástroj, který nám může pomoci se zvýšením kvality astronomických snímků i v praxi. Nejlepšího výsledku jsme dosáhli se snímkem mlhoviny M27, kdy výsledná rekonstrukce odpovídá kvalitou snímkům pořízených většími dalekohledy. Ve všech případech dekonvoluce zvýraznila strukturu zkoumaného objektu a zvýšila samotnou ostrost snímků. V případě galaxie M51 jsme taktéž využili naše zastavovací kritérium a omezili jím průběh dekonvoluce, což mělo za následek lepší rekonstrukci.

# Závěr

V této práci jsme postupně prozkoumali a sesumarizovali metody dekonvoluce použitelné v astronomickém snímkování, včetně jedné metody slepé dekonvoluce, která nám posloužila pro odhad impulzní odezvy. Také jsme do procesu dekonvoluce implementovali metody pro měření ostrosti, jež nám posloužily jako metrika kvality, aniž bychom museli mít referenční snímek. Dále se nám podařilo úspěšně nadefinovat vlastní metodu pro měření artefaktů ve snímku, tato metoda nám posloužila jednak pro rozhodnutí o kvalitě odhadu PSF a také jako zastavovací kritérium pro dekonvoluci. Toto kritérium nám posloužilo pro zlepšení kvality dekonvoluce ve snímku galaxie M51, kde se nám nepodařilo získat dostatečně kvalitní odhad PSF, který by nezpůsobil nepříměřený výskyt ringingu.

Implementované algoritmy jsme otestovali na 2 synteticky rozmazaných snímcích. V případě galaxie M104 jsme také demonstrovali destruktivní charakter Gaussovského rozmazání, kdy se nám nepodařilo kompletně zrekonstruovat rozmazaný snímek. I přesto bylo zvýšení kvality po dekonvoluci výrazné. Na druhém snímku jsme použili konzervativnější PSF pro rozmazání, aby lépe odpovídala realitě. Tomu odpovídala i výsledná rekonstrukce, podařilo se nám téměř kompletně zrekonstruovat původní snímek. Na těchto dvou experimentálních snímcích jsme také ozkoušeli metody měření ostrosti a námi definovanou míru výskytu artefaktů z definice 3.12. Ačkoliv samostatně nejde o nástroje, které by výrazně ovlivnily kvalitu výsledných dekonvolucí, jedná se o užitečné nástroje, které nám poskytují náhled do průběhu rekonstrukce, díky čemuž můžeme vyladit hyperparametry. Je potřeba zdůraznit, že dekonvoluce není jednoduchá záležitost, výsledky jsou silně závislé na nastavení parametrů a je potřeba postupovat obezřetně, máme-li získat dobré výsledky.

Nakonec jsme vše vyzkoušeli na reálných datech ze skutečných astronomických pozorování, dvou mlhovinách a jedné galaxii. Během experimentů se naplno projevilo, jak důležité je mít kvalitní odhad impulzní odezvy a také jak účinná je regularizace v potlačování šumu a artefaktů, především u snímku mlhoviny M27 byl účinek regularizace naprosto zásadní. Stejně tak se na skutečných datech osvědčila metoda pro měření artefaktů a metody pro měření ostrosti.

V budoucí práci by bylo užitečné vylepšit metody pro odhad PSF, především je zásadní kvalitní odhad jasu pozadí a šumu. Také by bylo užitečné modifikovat metodu pro detekci artefaktů a směřovat k jejich odstranění. K tomuto by bylo možné implementovat neuronové sítě, jako např. Unet nebo DnCNN, popřípadě je využít v plug-n-play architektuře, tyto metody se osvědčily u podobného problému, a sice odstraňování artefaktů vznikajících jpeg kompresí. Nakonec by v budoucnu bylo užitečné nasnímat astronomické objekty znovu, s nižším nastavením ISO a delší expozicí, abychom nadále potlačili vliv šumu ve snímku, všechny dekonvoluční metody šum výrazně amplifikují.

# Literatura

- [1] M. Bertero, P. Boccacci: *Introduction to Inverse Problems in Imaging*. Institute of Physics, 1998.
- [2] W. Richardson: *Bayesian-based iterative iterative method for image restoration*. Journal of the Optical Society of America, vol. 62, pp.55-59, 1972
- [3] L. Lucy: *An iteration technique for the rectification of observed distributions*. Astronomical Journal, vol. 79, pp. 745-754, 1974.
- [4] K. Lange: *Convergence of EM reconstruction algorithm with Gibbs smoothing* IEEE transactions of Medical Imaging, MI-9(4):439-446, 1990
- [5] Nicolas Dey, Laure Blanc-Féraud, Christophe Zimmer, Pascal Roux, Zvi Kam, et al.. *3D Microscopy Deconvolution using Richardson-Lucy Algorithm with Total Variation Regularization*. [Research Report] RR-5272, INRIA. 2004, pp.71. ffinria-00070726f
- [6] L. Shepp and Y. Vardi, *Maximum likelihood reconstruction for emission tomography*, IEEE Transaction on Medical Imaging, vol. MI-2, pp. 113-122, 1982
- [7] A. Dempster, N. Laird and D. Rubin: *Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm*, Journal of Royal Statistical Society, Series B, vol. 39, pp. 1-22, 1977
- [8] E. Issacson and H. Keller: *Analysis of numerical methods*, Wiley, 1966
- [9] L. Landweber: *An iteration formula for Fredholm integral equations of the first kind* American Journal of Mathematics, vol 73, pp. 615-624, 1951
- [10] P.V. Cittert: *Zum Einfluß der Spaltbreite auf die Intensitätsverteilung in Spektrallinien II*, Zeitschrift für Physik, vol. 69, pp. 298-308, 1931
- [11] P.Jansson, R. Hunt and E Peyler, *Resolution Enhancement of spectra*, Journal of the Optical Society of America, vol 60, pp.596-599, 1970
- [12] G.M.P van Kempen: *Image restoration in fluorescence microscopy*, PhD. thesis, Technische Universiteit Delft-Holland, 1990
- [13] G.M.P van Kempen and L.J. van Vliet: *The influence of the regularization parameter and first estimate on the performance of Tikhonov regularized non-linear image restoration algorithms*, Journal of Microscopy, 198:63-75, 2000
- [14] Nicolas Dey, Laure Blanc-Feraud, Christophe Zimmer, Pascal Roux, Zvi Kam, Jean-Christophe Olivo-Marin and Josiane Zerubia: *Richardson-Lucy Algorithm with Total Variation Regularization for 3D Confocal Microscope Deconvolution*

- [15] J. W. Miskin: *Ensemble Learning for Independent Component Analysis*, PhD. thesis, Selwyn College, Cambridge, 2000
- [16] J. Kotera and V. Smidl and F. Sroubek: *Blind Deconvolution with Model Discrepancies*, IEEE Transactions on Image Processing, vol. 26, pp. 2533-2544, 2017
- [17] S.Kullback: *Information theory and statistics*, New York, Dover Publications, 1959
- [18] F. Sroubek: *Bayesian Paradigm, Maximum a Posteriori Estimation*, Presentation to Variational methods in image processing
- [19] T. E. Bishop, S. D. Babacan, B. Amizic, A. K. Katsaggelos, T. Chan, R. Molina: *Blind image deconvolution: Problem formulation and existing Approaches*, Blind Image deconvolution, Theory and Applications, pp. 1-32, 1968
- [20] H. Wilbraham: *On a certain periodic function*, The Cambridge and Dublin Mathematical Journal, 3: 198–201, 1848
- [21] M. Bôcher: *Introduction to the theory of Fourier's series*, Annals of Mathematics, second series, 7 (3): 81–152, 1906;
- [22] S. Pertuz et al.: *Analysis of focus measure operators for shape-from-focus*. Pattern Recognition, 46(5):1415:1432, 2013
- [23] A. Santos, C.O. de Solorzano, J.J. Vaquero, J.M. Pena, N. Mapica, F.D. Pozo: *Evaluation of autofocus functions in molecular cytogenetic analysis*, Journal of Microscopy 188, pp. 264–272, 1997
- [24] Y. Sun, S. Duthaler, B.J. Nelson: *Autofocusing in computer microscopy: selecting the optimal focus algorithm*, Microscopy Research and Technique, 65, pp. 139–149, 2004.
- [25] M. Subbarao, T. Choi, A. Nikzad: *Focusing techniques*, Journal of Optical Engineering 32, pp. 2824–2836, 1993
- [26] J. P. Pacheco, G. Cristobal, J. Chamorro Martinez, J. Fernandez Valdivia: *Diatom autofocusing in brightfield microscopy: a comparative study*, Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition, vol. 3, pp. 314–317, 2000
- [27] S. Nayar, Y. Nakagawa: *Shape from focus*, IEEE Transactions on Pattern, Analysis and Machine Intelligence 16 824–831, 1994
- [28] G. Yang, B. Nelson: *Wavelet-based autofocusing and unsupervised segmentation of microscopic images*, Proceedings of the IEEE/RSJ International, Conference on Intelligent Robots and Systems, vol. 3, 2003, pp. 2143–2148
- [29] L. Firestone, K. Cook, K. Culp, N. Talsania, K. Preston Jr.: *Comparison of autofocus methods for automated microscopy*, Cytometry 12, pp. 195–206, 1991
- [30] N.K. Chern, P.A. Neow, M.H. Ang: *Practical issues in pixel-based autofocusing for machine vision*, Proceedings of the International Conference on Robotics and Automation, vol. 3, 2001, pp. 2791–2796
- [31] S.Y. Lee, Y. Kumar, J.M. Cho, S.W. Lee, S.W. Kim: *Enhanced autofocus algorithm using robust focus measure and fuzzy reasoning*, IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology 18 (2008) 1237–1246.

- [32] P. Magain, F. Courbin and S. Sohy: *Deconvolution with correct sampling*, The astrophysical Journal 494:472-477, 1998
- [33] A. Mosleh, J.M.P. Langlois and Paul Green: *Image Deconvolution Ringing Artifact Detection and Removal via PSF Frequency Analysis*
- [34] A. V. Umnov, A. V. Nasonov, A. S. Krylov and D. Yong: *Sparse method for ringing artifact detection*, 2014 12th International Conference on Signal Processing (ICSP), Hangzhou, China, 2014, pp. 662-667, doi: 10.1109/ICOSP.2014.7015086.
- [35] H. Liu, N. Klomp and I. Heynderickx: *A No-Reference Metric for Perceived Ringing Artifacts in Images*, in IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology, vol. 20, no. 4, pp. 529-539, April 2010, doi: 10.1109/TCSVT.2009.2035848.